Kamienie milowe & wyzwania ekonofizyki a także socjofizyki cz. 1

Ryszard Kutner*

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego; przewodniczący sekcji FENS PTF (Fizyka w Ekonomii i Naukach Społecznych)

Abstrakt. Omówiono kamienie milowe ekonofizyki a także socjofizyki wybrane w kontekściue wyzwań, jakie stawia współczesna społeczno-ekonomiczna rzeczywistość. Wskazano na ich rolę w budowaniu obszarów badawczych ekonofizyki i socjofizyki [1, 2, 3, 4].
Słowa kluczowe: ekonofizyka i socjofizyka; zdarzenia ekstremalne („czarne łabędzie") i superekstremalne („smoczy królowie"); fraktalność i wielofraktalność; prawa skalowaniaa i zjawiska krytyczne; rynki finansowe, walutowe oraz rynki firm

Abstract. We discuss the milestones of econophysics and sociophysics. We chose them in the context of the challenges posed by contemporary socio-economic reality. We indicate their role in building research areas in econophysics and sociophysics [1, 2, 3, 4].
Keywords: econophysics and sociophysics; extreme („black swans") and super-extreme („dragon kings") events; fractality and multifractality; scaling laws and critical phenomena; financial, currency & cryptocurrency, and company markets

1. Motywacja

Znajdujemy się w okresie kumulacji negatywnych globalnych napięć w wielu obszarach społeczno-ekonomicznej rzeczywistości. Rok 2022 wydaje się jednym z najbardziej groźnych i nieprzewidywalnych od zakończenia II wojny światowej – prawdziwy *thriller* sanitarno-humanitarny, społeczno-ekonomiczny i klimatyczny. Wśród tych globalnych wyzwań należy wymienić dwa dalekie od stacjonarności – niestabilne zjawiska i procesy działające w różnych skalach czasoprzestrzennych: (i) szok pandemiczny i jego skutki ekonomiczne, a także ogromne frustracje społeczne, jakie generuje [1, 2] oraz (ii) postępujące w alarmującym tempie zmiany klimatyczne, skutkujące gwałtownie narastającymi falami migracyjnymi w skali globalnej (oczywiście, nie są to jedyne przyczyny masowej migracji). Na czynniki te nakładają się napięcia międzykulturowe, pomiędzy systemami politycznymi (np. demokracja vs. autorytaryzm) oraz rywalizacja supermocarstw (o strefy wpływów). Wreszcie trzeba mieć na uwadze wpływ lokalnych zjawisk i procesów (takich jak np. Brexit czy atak na Kapitol – oba wywołane m.in. silną polaryzacją społeczną). Wszystko to jest obciążone (w różnym stopniu) deformacją medialną wykorzystującą osiagnięcia trwającej właśnie rewolucji informatycznej, która poprzez swój gwałtownie rosnący wpływ społeczny odgrywa coraz większą rolę. W tej sytuacji, charakteryzującej się ekstremalnymi/rzadkimi („czarne łabędzie") i superekstremalnymi („smoczy królowie") zdarzeniami połączonymi z ogromną zmiennością i gigantycznymi fluktuacjami oraz niezwykłą łatwością rozprzestrzeniania się informacji i epidemii, nasza codzienność staje się coraz bardziej niepewna i burzliwa. Te globalne i lokalne czynniki wywierają przemożny wpływ na rzeczywistość społeczno-ekonomiczną. Wszystko to, w połączeniu z nieporadnością banków centralnych i międzynarodowych instytucji finansowych, skutkuje spadkiem poziomu inwestycji, gwałtownym wzrostem bezrobocia, nadzwyczajnym ale nieporadnym zaangażowaniem państw w gospodarkę, inflacją i stagnacją, a w konsekwencji recesją.

Biorąc pod uwagę korelacje długookresowe, wieloskalowość/multifraktalność, krytyczność i złożoność wspomnianych powyżej wyzwań, podejście interdyscyplinarne jest niezbędne do sklasyfikowania, zrozumienia i probabilistycznego/stochastycznego przewidywania kierunku, w jakim społeczeństwa mogą ewoluować. Wykorzystując fizykę (a zwłaszcza fizykę statystyczną) do badania społeczno-ekonomicznej rzeczywistości, ekonofizyka i socjofizyka oferują odpowiednie, pogłębione podejście. Socjofizyka jest tutaj traktowana jak „starsza siostra" ekonofizyki – jedynie jako obszar odniesienia dla ekonofizyki, gdyż socjofizyka jest gotowa na osobne, systematyczne potraktowanie.

Rosnąca niepewność epidemiczna, klimatyczna i społeczno-ekonomiczna może przybierać różne formy i wpływać na rynki poprzez różne bańki rynkowe i zapaści rynków (zwiększając wszelkie formy ryzyka). W tym

*ORCID: 0000-0002-4949-8781

trudnym okresie, w powodzi informacji i danych, interdyscyplinarne podejście, takie jakie oferują ekonofizyka i socjofizyka, może być szczególnie przydatne np. w racjonalizowaniu i ograniczaniu wspomnianych zagrożeń. W artykule pokazano, w jaki sposób połączenie różnych dziedzin naukowych może zapewnić ramy pojęciowe i dostarczyć narzędzi pozwalających opisać i zrozumieć obecną bezprecedensową transformację społeczeństw zachodzącą w nadzwyczajnych okolicznościach.

Niniejszy artykuł, w połączeniu z poprzednio opublikowanymi [1, 2, 3, 4], ukazuje różnorodną naturę ekonofizyki, odzwierciedlającą bogactwo zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie. Ekonofizyka dostarcza nie tylko jakościowego, ale przede wszystkim ilościowego opisu rzeczywistości z bardzo różnych, uzupełniających się punktów widzenia. Jako społeczność jesteśmy gotowi do pozyskiwania, gromadzenia, opracowywania i publikowania danych empirycznych, analizowania przyczyn i skutków oraz mechanizmów, a także do prognozowania statystycznego i proponowania adekwatnych działań. Warunkiem jest przejrzystość i powszechna dostępność niezafałszowanych danych empirycznych gromadzonych przez różne niezależne instytucje i portale.

2. Wstęp

Jak same nazwy wskazują, ekonofizyka i socjofizyka to dziedziny hybrydowe, które można z grubsza zdefiniować jako podejścia ilościowe wykorzystujące pojęcia, idee i metodologie oraz modele obliczeniowe fizyki statystycznej (a w tym symulacje komputerowe) stosowane do zjawisk społeczno-ekonomicznych.

Trzeba zastrzec, że metodologia nauk ekonomicznych jest szersza od metodologii nauk fizycznych, gdyż jej stosowanie wymaga często informacji z przyszłości, np. potrzebna jest znajomość wielkości przyszłej inflacji. Aby sprostać temu wyzwaniu stosuje się różne triki np. podejście typu *implied volatility*. Sprawa jest jednak głębsza, gdyż ma tutaj miejsce *de facto* sprzężenie zwrotne pomiędzy teraźniejszością, tzn. decyzjami ekonomicznymi podejmowanymi teraz, a przyszłością, na którą te decyzje mają wpływ. Widać tutaj wpływ modelowania na rzeczywistość (nie mający miejsca w fizyce klasycznej). Trzeba też zauważyć, że zastosowanie fizyki statystycznej do świata ekonomii wymaga na ogół użycia większej liczby założeń (np. dotyczących ergodyczności czy samoświadomiowania).

Idea *fizyki społecznej* sięga pierwszej połowy XIX w. – termin ten pojawił się po raz pierwszy w książce Saint-Simona (1803) [5], w której autor opisuje społeczeństwo poprzez prawa fizyki i biologii. Podejście to spopularyzowali później Adolphe Quetelet (1835) [6] i August Comte (1856) [7].

Z dzisiejszego punktu widzenia idea fizyki społecznej doprowadziła do powstania socjofizyki i częściowo ekonofizyki. Podczas gdy pierwsza pochodzi z lat 70. (prace Weidlicha z roku 1971 [8] i Callena z Shapiro z roku 1974 [9]), to ta druga ruszyła „pełną parą" ponad trzydzieści lat temu z inspiracji fizyków Rosario N. Mantegny i H. Eugene Stanleya [10].

Chociaż korzenie współczesnej socjofizyki można wywieść od Majorany (1942) [11], z jego artykułu na temat wykorzystania fizyki statystycznej do opisu zjawisk społecznych, zasadnicze prace z tego obszaru ukazały się głównie w latach 70. i 80. XX w., a spora ich część dotyczyła zastosowania fizyki statystycznej do modelowania zjawisk społecznych w dużej skali [12]. Popularnymi tematami modelowanymi przez socjofizyków były i są między innymi rozpowszechnianie zachowań/postaw społecznych, kształtowanie opinii, rozpowszechnianie kultur i ewolucja języków, dynamika tłumu, a w tym zagadnienia ewakuacyjne, problemy rozprzestrzenia się epidemii i plotek/newsów oraz fake newsów (informacji nieprawdziwych), konflikty społeczne.

Warto wspomnieć, że rosnące zainteresowanie fizyków naukami społeczno-ekonomicznymi wynika głównie z dwóch czynników: (i) *Golden Age* fizyki materii skondensowanej dzięki sukcesowi nowoczesnej teorii przemian fazowych opartej na grupie renormalizacji czyli ϵ-rozwinięcia Wilsona i Koguta (laureatów nagrody Nobla) [13] (zastosowanie *real renormalization group* w socjologii na przełomie wieków jest dziełem Serge'a Galama [14, 15, 16]) oraz (ii) rosnącej komputeryzacji (cyfryzacji) społeczeństw, która utorowała drogę nowym perspektywom, oferując ogromną liczbę danych empirycznych (obserwacji) – *data mining*. Ten proces komputeryzacji zaczął się od rynków finansowych rejestrujących każdą pojedynczą transakcję lub zmiany cen walorów, oferując w ten sposób ogromną bazę danych (rejestrowanych z milisekundową zdolnością rozdzielczą) umożliwiającą badania naukowe na skalę globalną i modelowanie niemal *online*.

Wpływ fizyki na ekonomię to, wbrew pozorom, „historia stara jak świat" [17, 18, 19]. Jednak w przeciwieństwie do wcześniejszych prac importujących modele z fizyki do obszaru socjologii i ekonomii, socjofizyka i ekonofizyka odwołują się do nowego trendu. Mianowicie, badacze zajmujący się tymi obszarami nie są ekonomistami czy socjologami czerpiącymi inspiracje z prac fizyków, ale są po prostu fizykami przekraczającymi granice tradycyjnie rozumianej fizyki.

Rynki finansowe lub ogólniej rzeczywistość społeczno-ekonomiczną należy rozpatrywać w szerszym kontekście – systemów złożonych przejawiających zachowania emergentne, tworzących nowe właściwości, zjawiska i procesy, np. samoorganizującą się krytycz-

ność (SOK) [20, 21] lub spontaniczną, logarytmiczną periodyczność. Pierwsza jest godnym uwagi przykładem wieloskalowej kaskady, podczas gdy druga wynika z istnienia w układzie dyskretnej niezmienniczości translacyjnej (niekoniecznie bazującej na strukturze hierarchicznej) [22, 23, 24], zatem poszukiwanie relacji między skalami mikro i makro jest nieustającym wyzwaniem i dobrze umotywowanym kierunkiem ekonofizyki. Można powiedzieć, że wraz z narodzinami socjofizyki i ekonofizyki pojawiły się komplementarne możliwości pogłębionego, interdyscyplinarnego podejścia do ewolucji współczesnych społeczeństw.

Trzeba przyznać, że SOK jest atrakcyjną możliwością wglądu w dynamikę układów złożonych. Analizuje się tutaj dynamikę poprzez rozdzielenie skal czasowych, czyli zakładając, że narastająca niestabilność jest powolna (mod wolny), natomiast relaksacja jest szybka (mod szybki). Ten szybki mod prowadzi do powstania lawiny. Dynamika lawiny jest zasadniczo wieloskalowa, zachodzi poprzez sprzężenie w wielu skalach czasoprzestrzennych systemu. Podobnie jak w przypadku typowych zjawisk krytycznych, dynamika SOK jest niewrażliwa na szczegóły niestabilności, a więc na mikroskopię/mikroekonomię rzeczywistości społeczno-ekonomicznej (a w tym szeroko rozumianych finansów) [25, 26, 27]. Mamy tutaj do czynienia z uniwersalnością oraz robustnym zachowaniem emergentnym [20].

3. Trochę prehistorii

Ekonofizyka nie narodziła się „na kamieniu" – jest powiązana z pracami Louisa Bacheliera (LB), a zwłaszcza Jana Tinbergena (JT). Podczas gdy ten pierwszy posiadał certyfikat/licencjat z fizyki matematycznej ten drugi był doktorem fizyki.

Louis Bachelier obronił swoją rozprawę doktorską, przygotowaną pod kierunkiem Henri Poincarégo, w roku 1900 [28]. W tej pionierskiej rozprawie postawił kluczową hipotezę, aktualną po dzień dzisiejszy, o probabilistycznym charakterze rynków finansowych.

Minęło właśnie 100 lat od chwili, gdy Jan Tinbergen rozpoczął studiowanie matematyki i fizyki na Uniwersytecie w Leiden (Holandia) pod opieką Paula Ehrenfesta (obaj znajdują się na ryc. 1). W roku 1926 Jan Tinbergen ukończył studia magisterskie, a w trzy lata później obronił swoją rozprawę doktorską *Minimumproblemen in de natuurkunde en de economie*. Jej promotorem był Paul Ehrenfest. Rozprawa ta jest pierwszą w historii, pionierską próbą połączenia nauk przyrodniczych i ekonomicznych poprzez podejście ilościowe z wykorzystaniem metod fizyki. Bezpośredni wpływ na pracę Jana Tinbergena miały zainteresowania badawcze Paula Ehrenfesta, który sugerował istnienie analogii między formalizmem termodynamicznym a procesami ekonomicznymi. Współczesna ekonofizyka rozszerzyła tą analogię na formalizmy fizyki statystycznej. Ogólnie rzecz biorąc, Tinbergen zainicjował ideę wykorzystania fizyki w ekonomii (dzisiaj zwaną ekonomią ilościową). Jan Tinbergen był pierwszym laureatem Nagrody Nobla (którą otrzymał razem z Radgarem Frischem) w dziedzinie ekonomii w 1969 roku – dzisiaj uważany jest za twórcę ekonometrii.

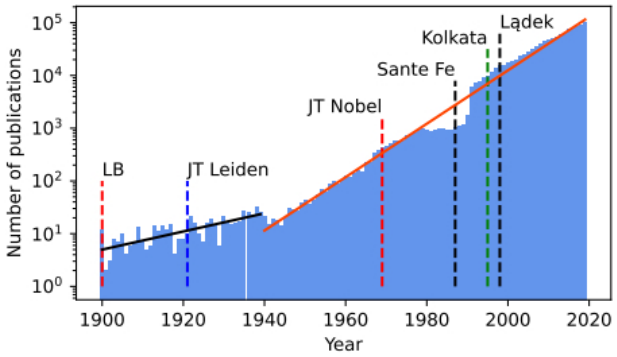
Ryc. 1. Grupa wychowanków i przyjaciół Paula Ehrenfesta (Leiden 1924 rok). Od lewej do prawej: Gerhard Dieke, Samuel Goudsmit, Jan Tinbergen, Paul Ehrenfest, Ralf Kronig oraz Enrico Fermi

Prekursorzy Louis Bachelier i Jan Tinbergen położyli epistemologiczne podwaliny pod ilościowe podejście do rzeczywistości społeczno-ekonomiczej. Było to podejście inspirujące i dalekowzroczne, skutkujące powstaniem współczesnej ekonofizyki.

Rycina 2 przedstawia histogram liczby publikacji z obszaru nauki, który dziś nazywamy ekonofizyką. Histogram został zbudowany na bazie publikacji wyodrębnionych przy użyciu ponad 70 charakterystycznych słów kluczowych i całych fraz z ponad 45 czołowych czasopism (zarejestrowanych w *Web of Science*, WofS).

Histogram rozpoczyna się w roku 1900, w którym ukazała się wspomniana wyżej rozprawa doktorska Louisa Bacheliera [28]. Jego wykładniczy wzrost dzieli się na dwa okresy. Pierwszy trwał od roku 1900 do 1938, a drugi od wybuchu II wojny światowej w roku 1939 do 2019. Tempo wzrostu $1/\tau$ dla pierwszego okresu jest około trzykrotnie mniejsze niż dla drugiego. Co więcej, wyraźnie widoczna jest około dziesięcioletnia stagnacja liczby publikacji w dekadzie lat 1980-1990.

W 1987 roku w samym centrum wspomnianego powyżej okresu stagnacji odbyła się konferencja Instytutu Santa Fe, której przewodniczyło dwóch laureatów Nagrody Nobla: ekonomista Kenneth Joseph Arrow – Nagroda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych (1972) wraz z Johnem Hicksem za ich pionierski wkład do ogólnej teorii równowagi ekonomicznej i teorii dobrobytu oraz fizyk Philip Warren Anderson – Nagroda Nobla



Ryc. 2. Skumulowany wykres liczby publikacji/histogram (NP) w zależności od czasu (liczonego w latach) związanych z wykorzystaniem metod fizyki w ekonomii i finansach. Widoczne sa dwa różne zakresy charakteryzujące się różnymi wartościami współczynnika wzrostu $1/\tau$. Mianowicie, $NP \sim exp(t/\tau)$, gdzie τ = 25,23 [rok] dla zakresu 1900-1938 oraz τ = 8,58 [rok] dla lat 1939-2019. Na wykresie zaznaczono następujące wydarzenia: LB (1900) oznacza pojawienie się rozprawy doktorskiej (wspomnianej w tekście) Louisa Bacheliera, JT Leiden (1921) datuje wstąpienie Jana Tinbergera na Uniwersytet w Leiden, JT Nobel (1969) oznacza otrzymanie Nagrody Nobla przez Jana Tinberegera, Santa Fe to wspomniana w tekście przełomowa konferencja Instytutu Santa Fe (1987), Kolkata oznacza historyczną konferencję w Kalkucie (Indie, 1995) oraz Lądek historyczna dla środowisk ekonofizyków i socjofizyków w Polsce konferencja w Lądku Zdroju (1998) – wszystkie konferencje związane w dużym stopniu z ekonofizyką a także socjofizyką. Ostatnie dwie zainicjowały odbywające się do dziś cykliczne konferencje ekonofizyczne: Sympozjum Fizyki w Ekonomii i Naukach Społecznych (FENS, w różnych ośrodkach akademickich i badawczych naszego kraju poczynając od roku 2004), Kolokwium z Ekonofizyki (organizowane przez Tizianę Di Matteo w różnych krajach poczynając od roku 2005) oraz konferencje organizowane w XXI w. przez Wei-Xing Zhou (Uniwersytet Nauki i Technologii Wschodnich Chin), Hideki Takayasu (Instytut Nikkei oraz Sony) (autor wykresu Jarosław Klamut)

w dziedzinie fizyki (1977) wraz z Nevillem Francisem Mottem i Johnem Hasbrouckiem Van Vleckiem za fundamentalne badania teoretyczne struktury elektronowej układów magnetycznych i nieuporządkowanych. Dodajmy, że Philip Anderson był współzałożycielem tego Instytutu, który powstał trzy lata wcześniej. Misję Instytutu zdefiniowano jako *Searching for Order in the Complexity of Evolving Worlds*. Celem tej pionierskiej konferencji była odpowiedź na pytanie: w jaki sposób ekonomia może skorzystać z dorobku fizyki, informatyki i biologii. Konferencja ta zapoczątkowała lawinę publikacji trwającą po dziś dzień.

4. Narodziny współczesnej ekonofizyki

Minęła właśnie trzecia dekada istnienia społeczności stosującej metodologie badania zjawisk i procesów ekonomicznych wykorzystujące narzędzia fizyki. W tym czasie pojawiło się wiele publikacji poświęconych temu, co od czasu konferencji w Kalkucie (ryc. 2) nazywamy ekonofizyką. Przyczyny tego podejścia są złożone i wielorakie. Jego katalizatorem była wspomniana konferencja Instytutu Santa Fe oraz możliwość publikowania w czasopismach fizycznych prac odnoszących się do ekonomii i socjologii [29, 30], rozsadzających ramy tradycyjnie rozumianej fizyki.

Początek współczesnej ekonofizyki datuje się przełomową pracą *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange* opublikowaną przez fizyka Rosario N. Mantegnę (doktoranta H. Eugene Stanleya) w czasopiśmie *Physica A* (1991) [31]. Autor udowodnił w niej „czarno na białym", że to rozkład Lévy'ego a nie rozkład Gaussa rządzi giełdą w dostępnych skalach czasowych.

Praca ta pokazała, że wkroczyliśmy w erę ekstremalnych i rzadkich zdarzeń, których dotkliwie doświadczamy. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG), a z nim Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego (PWLB) przestały obowiązywać na rynkach finansowych. W tym kontekście CTG zostało zastąpione przez Uogólnione Centralne Twierdzenie Graniczne (UCTG) Lévy'ego-Khintchina. Tym samym rozpoczęła się era stochastycznych procesów niebrownowskich i niegaussowskich. Zostało to także potwierdzone w pracy R.N. Mantegny i H.E. Stanleya *Scaling behaviour in the dynamics of an economic index* opublikowanej w *Nature* (1995) [32].

Praca Mantegny pokazała, że żyjemy w dobie zwiększonego ryzyka inwestycji na rynkach finansowych, gdzie możliwe są nie tylko kolosalne zyski, ale także ogromne straty. Otworzyło to drogę dla *moral hazard* prowadzącego do ogromnej niepewności na rynku, a co za tym idzie zwiększonego ryzyka inwestycyjnego.

Zachowanie współczesnych rynków finansowych zostało podsumowane około dekadę później w pracy przeglądowej [42], a zwłaszcza przez Mantegnę i Stanleya w pierwszej książce dotyczącej ekonofizyki *Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*[1] [33].

W kolejnych dwóch latach ukazały się ważne, wychodzące poza społeczność ekonofizyków książki: *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management*, J.-P. Bouchaud & M. Potters (2001) oraz książka B. Roehnera [29] pod wymownym tytułem *Patterns of Speculation. A Study of Observational Econophysics* (2002).

Do rozwoju ekonofizyki przyczyniły się jeszcze inne ważne publikacje: *Statistical properties of deterministic threshold elements–the case of market price*, H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi, K. Hamada w *Physica A* (1992) oraz *The Black-Scholes option pricing problem in mathematical finance: Generalization and extensions for a large class of stochastic processes*, J.-P. Bouchaud, D. Sornette w *J. Phys. I France* (1994).

Zwłaszcza praca *Criticality and Phase Transitions in Stock-Price Fluctuations* opublikowana ponad de-

1. Minęło 20 lat od pojawienia się polskiego tłumaczenia tej książki (Rosario N. Mantegna, H. Eugene Stanley *Ekonofizyka. Wprowadzenie* tłum. Ryszard Kutner, WN PWN, Warszawa 2001, dodruk 2018), 15 lat zaś od powołania na Wydziale Fizyki UW specjalności ekonofizyka (metody fizyki w ekonomii).

kadę później w *Physical Review Letters* (2006) autorstwa K. Kiyono, Z.R. Struzika, Y. Yamamoto [34] postawiła „kropkę nad i", wynika z niej bowiem, że CTG jest spełnione na rynkach finansowych z dala od krachów, podczas gdy w obszarze krachów obowiązuje UCTG.

Można powiedzieć, że jednym z ważniejszych osiągnięć ekonofizyki jest jej wkład w wieloskalową analizę danych empirycznych. Dzięki temu odkrytych zostało wiele faktów stylizowanych, dotyczących rynków finansowych [35, 36, 37, 38]. Otworzyło to możliwość prowadzenia badań np. o charakterze wielofraktalnym [39].

Na początku XXI w. Hideki Takayasu podjął się przeglądu stanu ekonofizyki oraz jej rzeczywistych i potencjalnych zastosowań, publikując materiały z międzynarodowych konferencji organizowanych przez siebie w Nikkei Institute (Tokio) [40, 41]. Dzięki temu uświadomił ogółowi, czym jest ekonofizyka i jakie są jej możliwości oraz stojące przed nią wyzwania.

5. Niezmienniczość ze względu na skalowanie

Druga połowa lat 90. XX w. zdominowana została przez tematykę kryzysów i krachów na rynkach finansowych, z czym wiązały się ryzyka i niepewności oraz próby prognozowania ekstremalnych zdarzeń. Za najważniejsze można uznać odkrycie oscylacji logarytmiczno-periodycznych na giełdach, przedstawione w pracach [23, 43, 44]. Samo odkrycie, jego pochodzenie i konsekwencje zostały podsumowane w 2003 roku w książce Didiera Sornette'a *Why Stock Market Crash* [45]. Odkrycie oscylacji log-periodycznych było inspiracją dla wielu autorów przez prawie dekadę – patrz artykuł przeglądowy *Physical approach to complex systems* autorstwa Jarosława Kwapienia i Stanisława Drożdża [46].

Logarytmiczna periodyczność jest cechą charakterystyczną dyskretnej niezmienności skali (określonej tylko dla wybranych charakterystycznych czynnikow skalujących). Jako rozwiązanie odpowiadające dyskretnej relacji skalowania, jest ona reprezentowana przez funkcję potęgową modulowaną przez oscylacje, które są okresowe pod logarytmem zmiennej objaśniającej. Innymi słowy, niezmienność skali dyskretnej prowadzi do wykładników i wymiarów krytycznych oraz do logarytmicznej poprawki do skalowania, która może pojawiać się nawet spontanicznie – patrz *Discrete-Scale Invariance and Complex Dimensions* autorstwa Didiera Sornette'a [22]. Ta spontaniczność jest immanentną, endogeniczną cechą rynków finansowych, dlatego jej rola dla ekonofizyki jest wprost trudna do przecenienia.

Mówiąc ogólnie, przejście od niezmienniczości ciągłej do dyskretnej można porównać z przejściem od fazy płynnej do stałej. W tym kontekście, szczególnie interesujący jest model krytycznej kaskady fal na kopcu piasku wskazujący na źródło oscylacji log-periodycznych [47]. Można powiedzieć, że w ramach ekonofizyki badane są zarówno zjawiska krytyczne, w tym np. samoorganizująca się krytyczność, opisane za pomocą czystych praw potęgowych, jak i struktury, których przejawem jest niezmienniczość dyskretna. Istnienie tych struktur wynika z istnienia charakterystycznych skal długości generowanych przez mechanizmy leżące u ich podłoża i skutkujących oscylacjami logarytmiczno-periodycznymi zsuperponowanymi z prawami potęgowymi.

Powyższe podejście jest przykładem analizy globalnej. Jej celem jest wydobycie powtarzalnej struktury w finansowych szeregach czasowych w obszarze skalowania, czyli w pobliżu progu krytyczności.

Opracowano również inne globalne podejścia do okresowości w empirycznych danych finansowych. Na szczególną uwagę zasługują np. te oparte na analogii z właściwościami materiałów lepkosprężystych [48]. Okresowa ewolucja indeksu giełdowego tuż przed i bezpośrednio po krachu jest opisana tutaj za pomocą uogólnionej funkcji wykładniczej Mittaga-Lefflera nałożonej na różnego rodzaju oscylacje.

Chociaż podejście globalne wydaje się interesujące i zachęcające, to główna trudność w jego stosowaniu tkwi w wielofraktalnej naturze finansowych szeregów czasowych. W rzeczywistości nie jesteśmy pewni, czy obserwowane oscylacje cen, a w tym te długofalowe, są związane z główną „bańką" cenową (tj. specyficzną strukturą szeregów czasowych kształtującą się od początku trendu wzrostowego do chwili krachu), czy też z mniejszymi bańkami lub ich superpozycjami pojawiającymi się jako poprawki drugiego lub wyższych rzędów do rozwiązań równań ewolucji cen. Trudno jest rozdzielić wkłady pochodzące od różnych rzędów *ante factum*.

Celem zbadania właściwości skalowania finansowych szeregów czasowych i rozstrzygnięcia czy generowany proces stochastyczny jest skorelowany oraz czy posiada długą pamięć, opracowane zostało alternatywne podejście. Zaproponowano kilka technik. Ich wspólnym mianownikiem jest konieczność wyznaczenia wykładnika Hursta H [49] procesu.

Zwykle tuż po krachu, opadające zbocze bańki giełdowej (bessa) jest scharakteryzowane wykładnikiem Hursta $H > 1/2$ reprezentującym tzw. *persistent random walk*. Odpowiada to pozytywnej autokorelacji szeregu czasowego notowań giełdowych. Sytuacja ma się inaczej w fazie hossy. W pobliżu krachu ma miejsce duża niepewność inwestorów giełdowych przejawiająca się w postaci rosnącej częstotliwości i amplitudzie wahań szeregu czasowego. Mamy do czynienia z *antypersistent ramdom walk*, czyli błądzeniem losowym z negatywną autokorelacją, która charakteryzuje się wykładnikiem Hursta $H < 1/2$. Możemy stwierdzić, że istnieje wyraźny

związek pomiędzy trendami lokalnych wartości wykładnika Hursta a dynamicznymi przemianami fazowymi na rynku (np. zmianami trendu, załamaniami lub pęknięciami notowań) spowodowanymi wewnętrzną organizacją i reorganizacją rynku finansowego jako układu złożonego.

Wśród różnych technik służących wyznaczeniu wykładnika Hursta popularność zyskała analiza zdetrendowanych fluktuacji (Detrended Fluctuation Analysis, DFA) [50, 51, 52]. DFA może być wykorzystywana jako podstawa lokalnego DFA zastosowanego po raz pierwszy do analizy krachów finansowych [53], a następnie rozszerzona [54, 55]. Lokalne DFA to nic innego jak DFA stosowane do małych podserii danego szeregu czasowego. W ten sposób charakteryzuje się lokalnie fraktalną naturę szeregów czasowych zamiast jego globalnych właściwości (czyli rozpatrywanych w długim horyzoncie czasowym), lokalne DFA jest zatem (jak sama nawa wskazuje) przykładem analizy lokalnej w przeciwieństwie do wcześniejszych metod typu globalnego, takich jak np. oscylacje logarytmiczno-periodyczne.

Techniki wyznaczania wykładnika Hursta zaproponowane w pracach [53, 54, 55] były z powodzeniem stosowane do rynków kapitałowych/finansowych [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62]. Oprócz wydobycia zasadniczych własności rynków finansowych, lokalny DFA może sugerować krótkoterminowe strategie inwestycyjne dla rynków (chwilowo) nieefektywnych (czyli z dala od wartości $H = 1/2$) [63]. Metoda DFA nadaje się do analizy skorelowanych kursów walut na rynkach walutowych [64, 65]. Technicznym wyzwaniem dla DFA jest konieczność przetworzenia dużej ilości danych empirycznych, których dostarcza szybkozmieniająca się rzeczywistość. Ta szybka zmienność ma nie tylko rosnącą amplitudę, ale obfituje w zdarzenia ekstremalne i superekstremalne [66].

6. Wieloskalowość i wielofraktalność

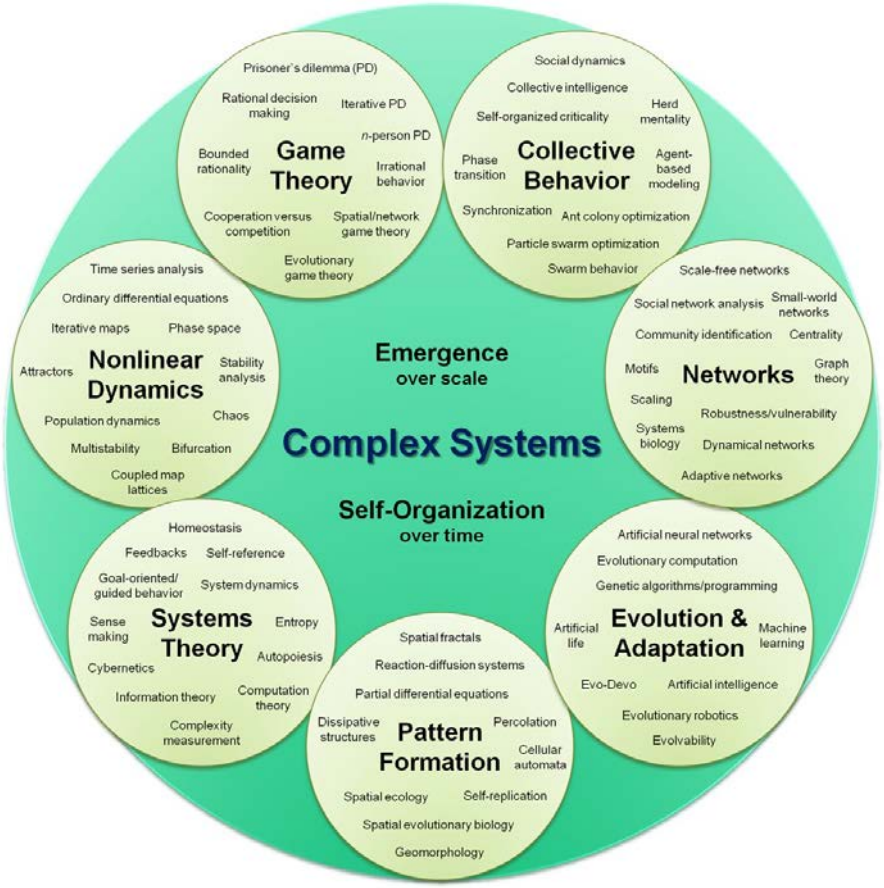
Wywodzące się z fizyki statystycznej metody wykorzystujące pojęcia rozszerzonej niezmienniczości, czyli multifraktalności oraz sprzężenie skal są dzisiaj używane powszechnie [39] do badania zarówno układów złożonych [67, 46, 68, 69], jak też dynamiki nieliniowej układów o niewielkiej liczbie stopni swobody [70]. Innymi słowy, jest to szybko rozwijający się kierunek badań szeroko stosowany w wielu różnych dziedzinach, nawet poza tradycyjnie rozumianą fizyką [71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78]. Przypomnijmy, multifraktale to obiekty fraktalne i/lub sygnały o niejednorodnie rozłożonej mierze. Dlatego opis multifraktali wymaga (w ogólności) nieskończonej rodziny wymiarów fraktalnych, czyli spektrum wymiarów fraktalnych. Własności skalowania multifraktali są zdefiniowane tylko lokalnie.

Istnieje kilka sprawdzonych, dobrze funkcjonujących technik multifraktalnych [68, 69], niektóre z nich zostały zainspirowane szczególnie popularną wielofraktalną analizą zdetrendowanych fluktuacji (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, MFDFA [67]). Pozwalają one konstruować widma wymiarów fraktalnych dla stacjonarnych i niestacjonarnych szeregów czasowych. Nawiasem mówiąc, techniki te pozwalają uzyskać inne ważne cechy multifraktalności. Trwają intensywne badania nad klasyfikacją stanów rynkowych za pomocą widma wymiarów. Ogólnie rzecz biorąc, im szersze jest to widmo w funkcji wykładnika Höldera (lokalnego wymiaru fraktalnego), tym bardziej skolektywizowany i bardziej nerwowy (zmienny) jest rynek. Ponadto z wielkości asymetrii tego spektrum można wywnioskować, jakie rodzaje fluktuacji dominują na rynku. Trzeba jednak dodać, że identyfikacja multifraktalnych własności szeregów czasowych (sygnałów) jest technicznie trudna ze względu na istnienie źródeł pozornej multifraktalności [79, 80]. Lista znanych źródeł (prawdziwej) multifraktalności jest przypuszczalnie niekompletna. Możliwe źródła wielofraktalności w finansach, np. na skutek korelacji długookresowych/długozasięgowych lub istnienia rozkładów posiadających pogrubione „ogony", były dyskutowane w pracach [81, 82, 83, 84].

7. Błądzenie losowe w czasie ciągłym na rynkach finansowych

Na początku obecnego stulecia formalizm błądzenia losowego w czasie ciagłym (Continuous Time Random Walk, CTRW) został zaadaptowany przez Masolivera, Montero i Weissa do opisu ewolucji rynku finansowego [85, 86, 87, 88]. Zaproponowali oni taki wariant CTRW, w którym duże zwroty są zdarzeniami rzadkimi a sam CTRW jest procesem dyfuzji anomalnej. Możliwość wykorzystania formalizmu CTRW, z udziałem spacerów Lévy o zmiennej prędkości, do opisu empirycznych danych tickowych pochodzących z rynków finansowych, została zauważona w pracach [89, 90]. Wyniki uzyskane w ramach obu podejść są komplementarne. Empiryczne dane tickowe wykorzystywane były intensywnie przez ekonofizykę w ostatniej dekadzie [91, 92, 93, 94, 95, 96, 97].

Formalizm CTRW zakłada, że *interevent-times* są ciągłe i fluktuujące (termin *interevent-time* występuje w literaturze pod różnymi nazwami: *pausing time*, *waiting time*, *inter-transaction time*, *intratrade time*, and *interoccurrence time*). Należy zauważyć, że termin *walk*/spacer w nazwie *continuous-time random walk* jest używany w sensie ogólnym, obejmującym dwa pojęcia: zarówno spacer (związany ze skończoną prędkością procesu), jak i *flight*/przelot (związany z natychmiastowym przemiesz-



Ryc. 3. Schematyczna prezentacja bogactwa obszarów składających się na naukę o złożoności, z którymi powiązana jest ekonofizyka i socjofizyka

czeniem się procesu), zatem, zmiennymi losowymi w formaliźmie CTRW mogą być nie tylko przyrosty procesu, ale także czasy między zdarzeniami (punktami zwrotnymi). Zmienne te charakteryzują się często rozkładami niegaussowskimi, np. dopuszczającymi wartości ekstremalne, superekstremalne oraz wieloskalowe. Własności te są immanentną cechą współczesnych rynków finansowych prowadząc do złamania zasady ergodyczności formalizmu CTRW. Badanie konsekwencji takiej sytuacji, w tym zwłaszcza relacji dyssypacyjno-fluktuacyjnych, jest jednym z najważniejszych kierunków badawczych ekonofizyki.

Wyniki uzyskane w pracy [95] sugerują także coś więcej. Otóż do opisu i zrozumienia procesów zachodzących na rynkach finansowych konieczne jest wzięcie pod uwagę nie tylko nieliniowych autokorelacji procesu i szumu, ale także długookresowych korelacji czasów międzytransakcyjnych. Formalizm CTRW świetnie się do tego nadaje. Otwiera to obiecujący kierunek badań ekonofizyki.

Warto też wspomnieć o zjawiskach progowych, które mają miejsce zarówno w naukach fizyczno-chemicznych, jak i społeczno-ekonomicznych. Kanonicznymi przykładami mogą być reakcje chemiczne rozpoczynające się dopiero po przekroczeniu progowych stężeń reagentów, zjawiska rozpadów promieniotwórczych, efekty fotoelektryczne (wewnętrzny i zewnętrzny) itp. Wracając do rynków finansowych, istnieje wiele danych empirycznych i publikacji na ten temat. Zjawiska progowe analizowano za pomocą formalizmu CTRW [97] uwzględniającego technikę *first-passage time*. Badano na tej drodze statystyki czasów wystąpienia po raz pierwszy nadmiernych strat (tych poniżej pewnego ustalonego ujemnego progu) i nadmiernych zysków (tych powyżej pewnego dodatniego progu) wskazując na ich uniwersalny charakter. Badania zysków i strat to kluczowy kierunek badawczy ekonofizyki.

8. Złożoność ekonofizyki i socjofizyki

Związek między ekonofizyką/socjofizyką a obszarami związanymi ze złożonością charakteryzujemy za pomocą diagramu pokazanego na ryc. 3. Obszary te wskazują zarazem na bogactwo tematyk ekonofizyki i socjofizyki. Tylko niektóre spośród nich przedstawiliśmy w pierwszej części artykułu. Kolejna część będzie poświęcona omówieniu złożoności ekonofizyki i socjofizyki w kontekście sieci złożonych, modelowania agentowego oraz przemian fazowych i zjawisk krytycznych stanowiących szeroko uprawiane kierunki badawcze ekonofizyki, a także (pod komplementarnym kątem) socjofizyki.

Literatura

[1] Marcel Ausloos, Dariusz Grech, Tiziana Di Matteo, Ryszard Kutner, Christophe Schinckus, H. Eugene Stanley: *Manifesto for a post-pandemic modeling*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 559, 125086 (2020)

[2] Entropy, SI open access: *Three Risky Decades: A Time for Econophysics?*, Ryszard Kutner, Christophe Schincks, and H. Eugene Stanley (Eds.)

[3] Physica A, VSI: *Econophysics and sociophysics in turbulent world*, Marcel Ausloos, Dariusz Grech, Tiziana Di Matteo, Ryszard Kutner, Christophe Schinckus, and H. Eugene Stanley (Eds.)

[4] Ryszard Kutner, Marcel Ausloos, Dariusz Grech, Tiziana Di Matteo, Christophe Schinckus, and H. Eugene Stanley: *Econophysics and sociophysics: Their milestones & challenges*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 516, 240-253 (2019)

[5] C.-H. Saint-Simon, *Lettres d'un habitant de Genève à ses contemporains*, (University of Lausanne Publications, Lausanne, 1803).

[6] A. Quetelet, *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*, (Paris: Guillaumin et Cie, Paris, 1835).

[7] A. Comte, *A general view of positivism Ê(Discours sur l'Esprit positif,Ê1844)*, (London Routledge, London, 1856).

[8] W. Weidlich, *The statistical description of polarization phenomena in society*, Br. J. Math. Stat. Psychol. 24(2), 251 (1971).

[9] E. Callen and D. Shapiro, *A theory of social imitation*, Physics Today 12(2), 23 (1974).

[10] M.H.R. Stanley, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M.A. Salinger, and H.E. Stanley, *Scaling Behavior in the Growth of Companies*, Nature 379, 804 (1996).

[11] E. Majorana, *Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali*, Scientia, Quarta serie, Febbraio-Marzo 1942, 58. English translation: E. Majorana, *The value of statistical laws in physics and social sciences*, Quant. Finance 5, 133 (2005).

[12] S. Galam, *Sociophysics: a personal testimony*, Physica A 336(2), 49 (2004).

[13] K. Wilson and J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ-expansion*, Phys. Rep. 112, 75 (1974).

[14] S. Galam, *Social paradoxes of majority rule voting and renormalization group*, J. Stat. Phys. 61, 943 (1990).

[15] S. Galam, *Real space renormalization group and totalitarian paradox of majority rule voting*, Physica A 285, 66 (2000).

[16] S. Galam, *A review of Galam models*, arXiv: 0803.1800v1 [physics.soc–ph] 12 Mar 2008.

[17] M. Ausloos, *Econophysics: Comments on a Few Applications, Successes, Methods and Models*,

[18] Ph. Mirowski, *More heat than light: economics as social physics, physics as nature's economics, Historical perspectives on modern economics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).

[19] M. Shabas, *A world ruled by number: William Stanley Jevons and the rise of mathematical economics*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1990).

[20] N.W. Watkins, G. Pruessner, S.C. Chapman, N.B. Crosby, H.J. Jensen, *25 Years of Self-organized Criticality: Concepts and Controversies*, Space Sci. Rev. 198, 3 (2016).

[21] E. Bonabeau, G. Theraulaz G, and J.L. Deneubourg, *Phase diagram of a model of self-organizing hierarchies*, Physica A 217, 373 (1995).

[22] D. Sornette, *Discrete-scale Invariance and Complex Dimensions*, Phys. Rep. 297, 239 (1998).

[23] N. Vandewalle, M. Ausloos, Ph. Boveroux, and A. Minguet, *How the financial crash of October 1987 could have been predicted*, Eur. Phys. J. B 4, 139 (1998).

[24] N. Vandewalle, M. Ausloos, Ph. Boveroux, and A. Minguet, *Visualizing the log-periodic pattern before crashes*, Eur. Phys. J. B 9, 355 (1999).

[25] A. Aleksiejuk and J. Hołyst, *Self-organized Criticality in Model of Collective Bank Bankrutcies*, Int. J. Modern Phys. C 13, 333 (2002).

[26] Th. Kron and Th. Grund, *Society as a Self-Organized Critical System, Cybernetics and Human Knowings* 16, 65 (2009).

[27] A. Steyer and J.-B. Zimmermann, *Self Organised Criticality in Economic and Social Networks. The Case of Innovation Diffusion* in *Economics with Heterogeneous Interacting Agents*, A. Kirma and J.-B. Zimmermann (Eds.) Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 503 (Springer-Verlag, Berlin 2001) p. 27.

[28] Louis Bachelier: *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 21-86.

[29] B.M. Roehner, *Patterns of Speculation. A Study in Observational Econophysics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

[30] G. Tusset, *From Galileo to Modern Economics – 2018. The Italian Origins of Econophysics*, eBook collection 2018, eBook

[31] R.N. Mantegna, *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan Stock-Exchange*, Physica A 179, 232 (1991).

[32] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Scaling behaviour in the dynamics of economic index*, Nature 376, 46 (1995).

[33] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).

[34] K. Kiyono, Z.R. Struzik, and Y. Yamamoto, *Criticality and Phase Transitions in Stock-Price Fluctuations*, Phys. Rev. Lett. 96, 068701 (2006).

[35] M.M. Dacorogna, R. Gencay, U.A. Müller, R.B. Olsen, O.V. Pictet, *An Introduction to High Frequency Finance* (Academic Press, 2001).

[36] R. Cont, *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues*, Quant. Finance 1, 223 (2001).

[37] S. Sinha, A.S. Chakrabarti, and M. Mitra, *Discussion & Debate: Can Economics be a Physical Science?*, European Physical Journal Special Topics 225:3087 (2016).

[38] W. Barfuss, G. P. Massara, T. Di Matteo, T. Aste, *Parsimonious Modeling with Information Filtering Networks*, Phys. Rev. E 94, 062306 (2016).

[39] Zhi-Qiang Jiang, Wen-Jie Xie, Wei-Xing Zhou, and Didier Sornette, *Multifractal analysis of financial markets: a review*, Reports on Progress in Physics 82(12), 125901 (2019), DOI: 10.1088/1361-6633/AB42FB

[40] *The application of econophysics*, Proceedings of the Second Nikkei Econophysics Symposium, H. Takayasu (Ed.) (Springer-Verlag, Tokyo, 2004).

[41] *Practical Fruits of Econophysics*, Proceedings of the Third Nikkei Econophysics Symposium, H. Takayasu (Ed.) (Springer-Verlag, Tokyo, 2006).

[42] Y. Liu, L.A.N. Amaral, P. Cizeau, P. Gopikrishnan, M. Meyer, C.-K. Peng, and H.E. Stanley, *Fluctuations and Their Correlations* in *Econophysics in Anomalous Diffusion. From Basics to Applications*, R. Kutner, A. Pękalski, and K. Sznajd-Weron (Eds.), LNP 519, 197 (1999).

[43] D. Sornette, A. Johansen, and J.-P. Bouchaud, *Stock market crashes, prekursors and replicas*, J. Physique I, France 6, 167 (1996).

[44] D. Sornette and A. Johansen, *Large financial crashes*, Physica A 245, 411 (1997).

[45] D. Sornette, *Why Stock Market Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, (Princeton Univ. Press, Princeton 2003).

[46] J. Kwapień and St. Drożdż, *Physical approach to complex systems*, Physics Reports 515, 115 (2012).

[47] M. Ausloos, K. Ivanova, and N. Vandewalle, *Crashes: symptoms, diagnoses and remedies*, in *Empirical sciences of financial fluctuations. The advent of econophysics*, Tokyo, Japan, Nov. 15-17, 2000, Conference Proceedings, H. Takayasu, (Ed.) (Springer Verlag, Berlin, 2002) pp. 62-76.

[48] M. Kozłowska, A. Kasprzak, R. Kutner, *Fractional Market Model and its verification on the Warsaw Stock Exchange*, Int. J. Mod. Phys. C 19 (2008) 453.

[49] H. E. Hurst, *Long-Term Storage Capacity of Reservoirs*, Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 116, 770 (1951).

[50] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, A. L. Goldberger, *Mosaic organization of DNA nucleotides*, Phys. Rev. E 49 (1994) 1685.

[51] G. Rotundo, M. Ausloos, C. Herteliu, B.V. Ileanu, *Hurst exponent of very long birth time series in XX century Romania. Social and religious aspects*, Physica A 429, 109 (2015).

[52] C. Herteliu, B.V. Ileanu, M. Ausloos, and G. Rotundo, *Effect of religious rules on time of conception in Romania from 1905 to 2001*, Human Reproduction 30 (9), 2202 (2015).

[53] D. Grech and Z. Mazur, *Can One Make any Crash Prediction in Finance using the Local Hurst Exponent Idea?* Physica A 336 (2004) 133-145.

[54] D. Grech and G. Pamuła, *The local Hurst exponent of the financial time series in the vicinity of crashes on the Polish stock exchange market*, Physica A 387 (2008) 4299.

[55] Ł. Czarnecki, D. Grech and G. Pamuła, *Comparison study of global and local approaches describing critical phenomena on the Polish stock exchange market*, Physica A (2008) 6801.

[56] L. Kristoufek, *Local Scaling Properties and Market Turning Points at Prague Stock Exchange*, Acta Phys. Pol. B 41 (2010) 1223.

[57] A. K. Mansurov, *Forecasting currency crisis by fractal analysis technique*, Studies on Russia Economic Development (SRED), Vol.19, No 1 (2008) 96.

[58] J. Alvarez-Ramirez, J. Alvarez, E. Rodriguez, G. Fernandez-Anaya, *Time-Varying Hurst Exponent for US Stock Markets*, Physica A 387 (2008) 6159.

[59] K. Karpio, A. J. Orłowski, and P. Łukasiewicz, *Stock Indices for Emerging Markets*, Acta Phys. Pol. A 117, 619 (2010).

[60] X. Shao-jun, J.Xue-jun, *Predicting drastic drop in Chinese stock market with local Hurst exponent*, Proceedings of ICMSE Conference (2009) p.1309-1315.

[61] J. A. O. Matosa, S. M. A. Gama, H. J. Ruskin, A. A. Sharkasi, M. Crane, *Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets*, Physica A 387 (2008) 3910.

[62] S. Stavroyiannis, V. Nikolaidis and I. A. Makris, *On the multifractal properties and the local multifractality sensitivity index of euro to Japanese yen foreign currency exchange rates*, Glob. Business and Econ. Rev. 13 (2011) 93.

[63] N. Vandewalle and M. Ausloos, *Coherent and random sequences in financial fluctuations*, Physica A 246, 454 (1997).

[64] M. Ausloos and K. Ivanova, *Correlations Between Reconstructed EUR Exchange Rates versus CHF, DKK, GBP, JPY and USD*, Int. J. Mod. Phys. C 12, 169 (2001).

[65] K. Ivanova and M. Ausloos, *False euro (FEUR)*

exchange rate correlated behaviors and investment strategy, Eur. Phys. J. B 20, 537 (2001).

[66] D. Sornette, G. Quillon (Eds.) *Dragon-kings: mechanism, evidence and empirical evidence*, Eur. Phys. J. ST 205(1) 2012.

[67] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegnera, E. Kościelny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley, *Multifractal Detrended Fuctuation Analysis of Nonstationary Time Series*, Physica A 316, 87 (2002).

[68] R.J. Buonocore, T. Di Matteo, and T. Aste, *Asymptotic scaling properties and estimation of the Generalized Hurst Exponents in financial data*, Phys.Rev.E 95, 042311 (2017).

[69] R.J. Buonocore, T. Aste, and T. Di Matteo, *Measuring multiscaling in financial time-series*, Chaos, Solitons and Fractals 88, 38 (2016).

[70] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems. An introduction*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

[71] T. Lux and M. Marchesi, *Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of financial markets*, Nature 397, 498 (1999).

[72] L. Calvet and A. Fisher, *Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence*, Rev. Econ. Stat. 84, 381 (2002).

[73] B.B. Mandelbrot, *The variation of certain speculative prices*, J. Business 36, 394 (1963).

[74] T. Di Matteo, T. Aste, and M.M. Dacorogna, *Scaling Behaviors in Differently Developed Markets*, Physica A 324, 183 (2003).

[75] T. Di Matteo, T. Aste, and M.M. Dacorogna, *Long-term Memories of Developed and Emerging Markets: Using the Scaling Analysis to Characterize their Stage of Development*, J. Banking & Finance 29, 827 (2005).

[76] T. Di Matteo, *Multi-scaling in Finance*, Quant. Finance 7, 21 (2007).

[77] J. Barunik and L. Kristoufek, *On Hurst exponent estimation under heavy-tailed distributions*, Physica A 39, 3844 (2010).

[78] G.P. Massara, T. Di Matteo, and T. Aste, *Network Filtering for Big Data: Triangulated Maximally Filtered Graph*, J. Complex Networks 5(2), 161 (2016).

[79] J. Ludescher, M.I. Bogachev, J.W. Kantelhardt, A.Y. Schumann, and A. Bunde, *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series*, Physica A 390, 2480 (2011).

[80] Ł. Czarnecki and D. Grech, *Multifractal dynamics of stock market*, Acta Phys. Pol. A 117, 623 (2010).

[81] N. Vandewalle and M. Ausloos, *Fractals in Finance*, in *Fractals and Beyond. Complexity in the Sciences*, M. M. Novak (Ed.) (World Scient., Singapore, 1998) p. 355.

[82] K. Ivanova and M. Ausloos, *Low q-moment multifractal analysis of Gold price, Dow Jones Industrial Average and BGL-USD exchange rate*, Eur. Phys. J. B 8, 665 (1999); Err. 12, 613 (1999).

[83] M. Ausloos and K. Ivanova, *Multi-fractal nature of stock exchange prices*, Comp. Phys. Commun. 147 (2002) 582-585

[84] Th. Lux and M. Ausloos, *Market Fluctuations I: Scaling, Multi-scaling and their Possible Origins*, in *The Science of Disasters: Scaling Laws Governing Weather, Body, Stock-Market Dynamics*, A. Bunde, J. Kropp and H.-J. Schellnhuber, Eds. (Springer Verlag, Berlin, 2001) pp.377.

[85] J. Masoliver, M. Montero, and G.H. Weiss, *Continuous-time random-walk model for financial distributions*, Phys. Rev. E 67, 021112 (2003).

[86] J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló, and G.H. Weiss, *The continuous time random walk formalism in financial markets*, J. Econ. Behav. & Org. 61, 577 (2006).

[87] E. Scalas, *The application of continuous-time random walks in finance and economics*, Physica A 362, 225 (2006).

[88] R. Kutner and J. Masoliver, *The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook* Eur. Phys. J. B 90, 50 (2017).

[89] R. Kutner, *Stock market context of the Lévy walks with varying velocity*, Physica A 314, 786 (2002).

[90] R. Kutner and F. Świtała, *Stochastic simulations of time series within Weierstrass-Mandelbrot walks*, Quant. Fin. 3, 201 (2003).

[91] P. Oświęcimka, J. Kwapień, and St. Drożdż, *Multifractality in the stock market: price increments versus waiting times*, Physica A 347, 626 (2005).

[92] Z. Eisler and J. Kertész, *Size matters: some stylized facts of the stock market revisited*, Eur. Phys. J. B 51, 145 (2006).

[93] Z. Eisler and J. Kertész, *Scaling theory of temporal correlations and size-dependent fluctuations in the traded value of stocks*, Phys. Rev. E 73, 046109 (2006).

[94] J. Perelló, J. Masoliver, A. Kasprzak, and R. Kutner, *Model for interevent times with long tails and multifractality in human communications: An application to financial trading*, Phys. Rev. E 78, 036108 (2008).

[95] T. Gubiec and R. Kutner, *Backward jump continuous-time random walk: An application to market trading*, Phys.Rev. E 82, 046119 (2010).

[96] J. Kwapień and St. Drożdż, *Physical approach to complex systems*, Physics Reports 515, 115 (2012).

[97] M. Denys, T. Gubiec, R. Kutner, M. Jagielski, and H.E. Stanley, *Universality of market superstatistics*, Phys. Rev. E 94, 042305 (2016).