



Topologiczna materia kwantowa¹

Wykład noblowski wygłoszony 8 grudnia 2016

John F. Duncan M. Haldane

Department of Physics, Princeton University

Opublikowany w języku polskim za zgodą Nobel Foundation

©the Nobel Foundation 2016

Przekład dokonany przy wsparciu finansowym Fundacji Pro-Physica

Streszczenie. Omawiam historię i okoliczności trzech wymienionych w tytule przyznania tej Nagrody Nobla odkryć: topologicznego wzoru „TKNN” dotyczącego całkowitego efektu Halla podanego przez Davida Thoulessa i jego współpracowników, izolatora Cherna, czyli anomalnego kwantowego efektu Halla oraz rolę jaką odegrał on w późniejszym odkryciu topologicznych izolatorów niezmienniczych względem operacji odwrócenia czasu i wreszcie nieoczekiwanego odkrycia topologicznego stanu typu cieczy spinowej kwantowego łańcucha antyferromagnetycznego utworzonego ze spinów $S = 1$, który stanowił pierwszy przykład topologicznej kwantowej materii. Powiem też, jak te pierwsze odkrycia doprowadziły do powstania niezwykle interesującej i obecnie wyjątkowo aktywnie rozwijanej dziedziny, jaką jest fizyka „topologicznej materii”.

Słowa kluczowe: topologiczne stany kwantowe, efekt Halla, faza Berry’ego, dwuwymiarowe izolatory topologiczne, spinowy efekt Halla, jednowymiarowe układy spinów

Abstract. I will describe the history and background of three discoveries cited in this Nobel Prize: The “TKNN” topological formula for the integer quantum Hall effect found by David Thouless and collaborators, the Chern Insulator or quantum anomalous Hall effect, and its role in the later discovery of time-reversal-invariant topological insulators, and the unexpected topological spin-liquid state of the spin $S=1$ quantum antiferromagnetic chain, which provided an initial example of topological quantum matter. I will summarize how these early beginnings have led to the exciting, and currently extremely active, field of “topological matter.”

Keywords: topological quantum states, Hall effect, Berry’s phase, two-dimensional topological insulators, spin Hall effect, one-dimensional spin systems

Na to, co dziś jest znane pod nazwą *topologicznych stanów kwantowych* materii skondensowanej po raz pierwszy natknięto się około roku 1980 przy okazji odkrycia całkowitego (Klitzing i inni, 1980), a później ułamkowego (Tsui i inni, 1982) kwantowego efektu Halla w dwuwymiarowych układach elektronów w urządzeniach półprzewodnikowych oraz przy okazji teoretycznego odkrycia oddzielonych przerwą od reszty widma energetycznego splątanych stanów typu ciecz spinowa układów całkowitych spinów — *kwantowych łańcuchów spinowych* — (Haldane i inni, 1986). Występowanie takich stanów kryształów tworzonych przez organiczne łańcuchy molekuł NENP² zostało później potwierdzone eksperymentalnie (Buyers i inni, 1986). Wspólną cechą tych dwóch odkryć było to, że były zupełnie nieoczekiwane oraz zdziwienie, jakie wywołały: wyłamywały się

one bowiem z ustalonych już zdawałoby się paradygmatów *fizyki materii skondensowanej* (nazywanej dawniej *fizyką ciała stałego*). Nie było od razu widoczne, że między tymi dwiema niespodziankami może istnieć jakiś związek; teraz jednak, zwłaszcza dzięki pracy klasyfikującej Xiao-Gang Wena (Chen i inni, 2013), rozumiemy, że ich wspólnym mianownikiem jest to, iż występują w nich splątane „topologicznie nietrywialne” stany materii, które różnią się zasadniczo od wcześniej znanych jej stanów topologicznie trywialnych i że to właśnie jest głównym źródłem ich nieoczekiwanych właściwości.

Topologia jest działem matematyki wykorzystywanym pierwotnie do klasyfikowania kształtów trójwymiarowych obiektów takich jak piłka futbolowa, piłka do rugby (lub amerykańskiego futbolu), kule, kubki do kawy (bez ucha), które są „topologicznie trywialnymi” powierzchniami bez otworów oraz takich jak bajgle, ciasto pączka, prele i filizanki do kawy z uszkami, które są przykładami „nietrywialnych” powierzchni z jednym lub więcej otworami. Mrówka poruszająca się po takiej „nietrywialnej” powierzchni może obejść zamkniętą pętlę (czyli przejść drogę zaczynającą się i kończącą w tym

1. Nagrodę Nobla z fizyki w roku 2016 podzielili między siebie David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane i J. Michael Kosterlitz. Artykuł jest tekstem jednego z dwóch wykładów wygłoszonych z tej okazji (przyp. red.).

2. NENP to catena-(mu-nitrito)-bis(ethylenediamine)nickel(II) perchlorate czyli związek $\text{Ni}(\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2)_2\text{NO}_2\text{ClO}_4$.

samym punkcie), która nie może zostać ściągnięta do [dowolnie]³ małego kólecčka wokół jednego punktu powierzchni. Pierwotne idee topologii zostały przez matematyków znacznie uogólnione i uczynione abstrakcyjnymi, ale zasadnicza idea, że pewne różne obiekty są *topologicznie równoważne*, jeśli tylko mogą być w sposób gładki przekształcone jedne na drugie, pozostaje wciąż ta sama. Kluczową ideą jest też to, że różne topologiczne [typy obiektów] są klasyfikowane liczbami całkowitymi, takimi jak liczba otworów powierzchni, które nie mogą zmieniać się w sposób ciągły.

Z kolei splątanie jest jedną z zasadniczych cech mechaniki kwantowej. Polega ono na tym, że jeśli stan układu jest reprezentowany przez stany kwantowe jego podukładów (jest tak zazwyczaj, gdy układ składa się z kilku przestrzennie rozdzielonych części), to pomiar jakiejś właściwości jednego z tych podukładów wpływa na stan pozostałych. Topologia *topologicznych stanów materii* uhonorowanych tą nagrodą Nobla jest bardziej abstrakcyjna niż [topologia] kształtu obiektów codziennego użytku takich jak futbolówki i filizanki do kawy. Rozróżnia ona bowiem typy *kwantowego splątania*, które nie mogą być w sposób gładki przekształcone jeden w drugi przy warunku zachowania pewnych symetrii. Typ splątania stanu kwantowego jest *topologicznie trywialny*, gdy może być w sposób gładki przekształcony w stan, w którym każda część układu jest w niezależnym stanie, tak iż pomiar wykonany na jednej części nie wpływa na stan pozostałych części (taki stan całego układu nazywa się *stanem iloczynowym*). W przypadku kwantowych układów spinów (wykorzystywanych jako modele teoretyczne niemetalicznych materiałów magnetycznych) okazało się, że niemal wszystkie wcześniej przewidziane teoretycznie ich stany były topologicznie trywialne i z tego powodu nie obserwowano zaskakujących właściwości stanów topologicznych nietrywialnych.

Trochę czasu zajęło zanim powszechnie zrozumiano, że dzięki tym odkryciom miała się wyodrębnić szeroka klasa nowych „topologicznych stanów materii”. Pierwszym kamieniem milowym na tej drodze było odkrycie przez Davida Thoulessa i jego współpracowników: Mahito Kohmoto, Marcela den Nijsa i Petera Nightinghale (TKNN) ważnego wzoru (Thouless i inni, 1982), w którym rychło fizyk matematyczny Barry Simon (Simon, 1983) rozpoznał po prostu *niezmiennik pierwszej klasy Cherna* występujący w abstrakcyjnej matematycznej topologii tzw. wiązek włóknistych o grupie strukturalnej $U(1)$ i w istotny sposób wiążący się z postępującym równoległe w owym czasie rozwojem badań nad tzw. adia-

batyczną fazą kwantową odkrytą w roku 1983 przez Michaela Berry’ego (Berry, 1984). Ponieważ przedstawiam tu także część nagrodzonej Noblem pracy Davida Thoulessa, powiem o tym w moim wykładzie najpierw i znacznie od kwantowego efektu Halla, za który zostały już przyznane dwie nagrody Nobla (w roku 1985 i 1998).

Elektrony o ładunku e uwięzione na dwuwymiarowej powierzchni, przez którą przechodzi pole magnetyczne o indukcji B , poruszają się po okręgach zwanych *orbitami Landaua*. Zgodnie z mechaniką kwantową taki ruch okresowy powoduje powstanie zbioru dyskretnych poziomów energii każdego z elektronów. Poziomy te są zwane *poziomami Landaua*. W najprostszym (półklasycznym) modelu okres $T = 2\pi/\omega_c$ takiego ruchu po orbicie kołowej nie zależy od jej promienia i dozwolone energie poziomów Landaua są takie, jak oscylatora harmonicznego, tj. $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$, gdzie $\omega_c = eB/m_e$ jest tzw. *częstością cyklotronową*. Jeśli przyjąć, że powierzchnia charakteryzuje się translacyjną niezmienniczością, czyli że żaden z jej punktów nie jest wyróżniony, to energia każdego stanu należącego do danego poziomu Landaua jest niezależna od położenia środka orbity i degeneracja poziomu jest bardzo wysoka (makroskopowa). Liczba niezależnych jednocząstkowych stanów należących do danego poziomu Landaua jest proporcjonalna do pola powierzchni A układu; w istocie jest ona równa BA/Φ_0 , gdzie $\Phi_0 = h/e$ jest kwantem (Londonów) strumienia pola magnetycznego.

Zasada wykluczania Pauliego mówi, że każdy niezależny jednocząstkowy stan kwantowy może być obsadzony przez nie więcej niż jeden elektron. Poziomy Landaua są trochę analogiczne do poziomów $1s, 2p, 3d, \dots$ otrzymywanych w ramach prostego, znanego z licealnych lekcji chemii, kwantomechanicznego modelu atomu. Jednak w odróżnieniu od tych atomowych poziomów, które mają odpowiednio 2, 6, 10, \dots dostępnych do obsadzenia stanów, liczba stanów składających się na pojedynczy poziom Landaua jest olbrzymia (przypuszczalnie rzędu 10^{12} w rzeczywistych próbkach) i zmienia się z przyłożonym polem magnetycznym. Ponieważ liczba elektronów mogących poruszać się po dwuwymiarowej powierzchni jest w zasadzie ustalona, wydaje się, że można by dopasować liczbę dostępnych stanów do liczby elektronów, dobierając odpowiednio pole magnetyczne, tak by w stanie podstawowym układu całkowicie zapełniony był jeden lub więcej poziomów Landaua, a pozostałe były zupełnie nieobsadzone; powstawałaby w ten sposób przerwa energetyczna rozdzielająca najwyższy obsadzony (zwany w chemii kwantowej HOMO od ang. *highest occupied molecular orbital*) i pierwszy nieobsadzony (zwany LUMO od ang. *lowest unoccupied molecular orbital*) poziom, co czyniłoby układ podobnym do naturalnego (a nie powsta-

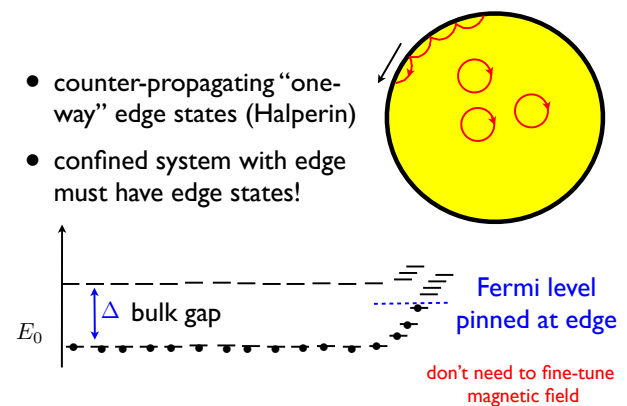
3. Teksty w nawiasach kwadratowych dodał tłumacz z uwagi na zbyt zwięzły, a czasem wręcz niezrozumiały język oryginału (przyp. red.).

tego w wyniku domieszkowania) półprzewodnika. Przy takich sztucznych modelowych warunkach proste obliczenie hallowskiej przewodności σ^{xy} układu rzeczywiście dałoby efekt Halla charakteryzujący się uniwersalną wartością $\sigma^{xy} = ne^2/h$ (która zależy tylko od stałych podstawowych, niezależnych od materiału oraz od liczby całkowitej n , tj. liczby całkowicie obsadzonych poziomów Landaua), odpowiadający temu, co zmierzył von Klitzing.

Błąd popełniony w takim naiwnym wyjaśnieniu całkowitego kwantowego efektu Halla polega na tym, że wymaga ono bardzo delikatnego dopasowania natężenia pola magnetycznego. Tymczasem uwagę von Klitzinga na ten efekt zwróciła właśnie jego niezależność od dokładnej wartości pola. „Włączał” on pole przykładając je do urządzenia, przez które przepływał ustalony prąd (stabilizowany przez źródło prądu stałego) i zaobserwował, że gdy układ osiągał już stan stacjonarny, cyfrowy woltomierz pokazywał zawsze to samo napięcie Halla między przeciwległymi bocznymi brzegami próbki z dokładnością do wielu cyfr znaczących. (Legenda mówi, że von Klitzing w pierwszej chwili pomyślał, że woltomierz jest zepsuty!) Oczywiście, każdorazowe „włączanie” pola magnetycznego przebiegało trochę inaczej, zatem końcowe pole nigdy nie mogło być dokładnie takie samo w kolejnych uruchomieniach eksperymentu i z pewnością nigdy przypadkowo nie mogło przyjmować dokładnie „magicznej wartości”, jaką musiałoby mieć w podanym wyżej naiwnym wyjaśnieniu efektu. Wielce szczęśliwą okolicznością było to, że von Klitzing włączał pole magnetyczne utrzymując ustalony prąd płynący przez próbkę, a nie włączał prądu mając już ustalone pole, gdyż wówczas koincydencja polegająca na takim samym odczycie woltomierza nigdy by się nie zdarzyła!

Rzeczywiste próbki, nawet gdy są względnie czyste, nie odznaczają się translacyjną niezmienniczością, która powoduje, że wszystkie stany należące do danego poziomu Landaua mają dokładnie taką samą energię. Lokalny potencjał elektrostatyczny zmienia się przypadkowo od punktu do punktu, zwiększając energię elektronów na jednych orbitach i zmniejszając energię na innych, zależnie od tego jaką ma wartość w środku danej kołowej orbity Landaua. Powoduje to pewne poszerzenie poziomów Landaua. Pierwsze próby wyjaśnienia efektu [zaobserwowanego przez von Klitzinga] skupiły się na skutkach takiego nieporządku. Ustalono wtedy, że jakkolwiek w dwuwymiarowych układach elektronów wykazujących tego rodzaju nieporządek istnieją stany zlokalizowane, to w obecności pola magnetycznego sytuacja ulega zmianie, wówczas bowiem środki [większości] orbit Landaua wykonują powolną precesję wokół lokalnego ekstremum potencjału (jej kierunek zależy od

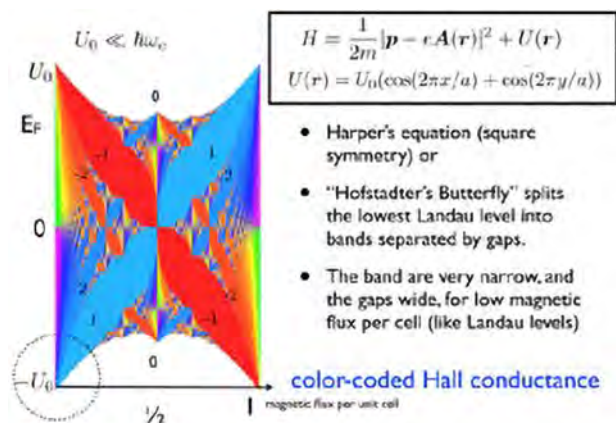
tego, czy jest to minimum, czy maksimum); orbity te odpowiadają stanom zlokalizowanym. Okazuje się jednak, że środki orbit odpowiadających niektórym energiom bliskim środka przedziału energii poszerzonego poziomu Landaua przemieszczają się po torach mających kształt bardzo wydłużonych elips i stany odpowiadające tym orbitom nie są już zlokalizowane, lecz rozprzestrzenione. W takim obrazie przerwa pomiędzy stanami HOMO i stanami LUMO nie istnieje: mają one taką samą energię (nazywaną *energiją Fermiego*) i, gdy natężenie pola magnetycznego zmienia się, energia Fermiego przesuwa się tak, by utrzymać poziomy o niższych od niej energiach całkowicie obsadzone, a te o energiach wyższych całkowicie puste. Całkowita liczba n wyznaczana przez von Klitzinga zmienia się zaś tylko wtedy, gdy energia Fermiego przechodzi przez wyróżnioną wartość, przy której istnieją stany *rozprzestrzenione*. Wyjaśnia to obserwowany efekt w terminach dość zawiłej teorii lokalizacji [stanów], która na pierwszy rzut oka nie ma oczywistego związku z topologią. To co jest tu (dziś oczywiste) bardzo charakterystyczną właściwością topologiczną stało się jasne, gdy Bert Halperin zwrócił uwagę na istotną rolę stanów brzegowych (Halperin 1982).



Ryc. 1. Prosty obraz poziomów energii występujących w problemie całkowitego kwantowego efektu Halla. Przerwa energetyczna we wnętrzu próbki jest stabilizowana dzięki przechodzeniu przez poziom Fermiego bezszczelinowego widma energii stanów brzegowych. (Poziomy energii są pokazane w funkcji odległości od środka próbki mającej kształt dysku.)

W obrazie półklasycznym stany brzegowe są łatwo widoczne jako tzw. przeskakujące orbity, wykonujące precesję wzdłuż brzegu układu. Dzieje się tak, gdy kołowa orbita Landaua cząstki naładowanej musiałaby przeciąć brzeg; cząstka odbija się wtedy od niego i przechodzi na inną orbitę kołową, tak jak to widać z ryc. 1. W rezultacie wygląda to, jak gdyby orbita cząstki wykonywała precesję w kierunku przeciwnym do kierunku, w którym cząstka obiega orbitę kołową. Nawet przy braku nieporządku wewnątrz próbki, tj. gdy kolejne poziomy Landaua są oddzielone od siebie przerwami, widmo energii stanów brzegowych układu jest ciągłe.

Przechodzi ono przez poziom Fermiego, co umożliwia przepływ spektralny, czyli przechodzenie elektronów obsadzających poziomy Landaua we wnętrzu próbki do stanów brzegowych i na odwrót. Eliminuje to konieczność dokładnego dostrajania wartości pola, aby we wnętrzu próbki utrzymać poziomy Landaua poniżej energii Fermiego całkowicie wypełnione, a te powyżej całkowicie puste. [Ponieważ liczba elektronów jest ustalona,] całkowita liczba [zapełnionych] stanów nie może się zmienić, więc przy zmianach natężenia pola magnetycznego [powodujących zmiany liczb stanów poszczególnych poziomów Landaua], elektrony muszą przepływać z jednego poziomu Landaua do drugiego: stany brzegowe, których widmo energii nie ma przerwy, stanowią konieczną „rurę hydrauliczną” łączącą poziomy Landaua i umożliwiającą redystrybucję [zapełnionych] stanów [między te poziomy] przy zmianach pola magnetycznego.



Ryc. 2. Widmo energii elektronów poruszających się w periodycznej sieci umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym zwane *motylem Hofstadtera*. Poziomy energii pokazane są tu w funkcji strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez komórkę jednostkową. Struktura widma w lewym dolnym rogu jest niemal taka jaką tworzy układ zwykłych poziomów Landaua. Kolory, którymi zaznaczone są przerwy energetyczne rozdzielające podpasma, odpowiadają różnym całkowitym liczbom n wyznaczającym skwantowanie efektu Halla w sytuacji, gdy poziom Fermiego leży w danej przerwie. (Barwny wykres widma udostępnił D. Osadchy i J. Avron)⁴

Istniejące w sposób nieunikniony stany brzegowe, które transportują cząstki tylko w jednym kierunku dookoła brzegu [próbki] pozwalają zrozumieć stabilność kwantowego efektu Halla (QHE) jako skutek wpływu brzegu układu. Pożyteczne jest jednak zrozumienie tej stabilności na podstawie globalnych właściwości wnętrza układu. To właśnie tu w tej opowieści pojawia się wzór TKNN znaleziony przez Thoulessa i jego współpracowników (Thouless i inni, 1982). Inspiracją dla Thoulessa było słynne widmo zwane motylem Hofstadtera

(Hofstadter, 1976) pokazane na ryc. 2. Widmo takie powstaje, gdy na dwuwymiarowej powierzchni, przez którą przechodzi pole magnetyczne, występuje periodyczny potencjał. W takiej sytuacji, jeśli strumień pola magnetycznego przechodzącego przez jednostkową komórkę periodycznego potencjału jest liczbą wymierną postaci p/q (p i q są tu względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, niemającymi wspólnych dzielników), problem struktury pasm energii można ściśle rozwiązać. Rozwiązanie zależy w bardzo delikatny sposób od wartości liczb p i q ; aby je otrzymać trzeba rozpatrywać powiększoną, tzw. magnetyczną komórkę jednostkową, tj. taką, by przechodzący przez nią strumień pola magnetycznego był całkowitą wielokrotnością londonowskiego kwantu Φ_0 . Wpływ pola magnetycznego polega na tym, że każde pasmo istniejące przy braku pola, w jego obecności rozszczepia się na q podpasm. Zatem gdy strumień pola przechodzący przez jednostkową komórkę zmienia wartość od $1/3$ do $100/301$, to co przy $1/3$ było jednym podpasmem rozdziela się na 100 znacznie węższych podpasm, choć strumień pola magnetycznego zmienił się tylko nieznacznie!

Już wcześniej, dzięki jasnemu argumentowi podanemu przez Roberta Laughlina (Laughlin, 1981), było oczywiste, że jeśli przy braku wzajemnego oddziaływania elektronów energia Fermiego leży wewnątrz przerwy energetycznej w ich widmie, hallowska przewodność σ^{xy} musi, w granicy niskich temperatur, $T \rightarrow 0$, być całkowitą wielokrotnością $e/\Phi_0 = e^2/2\pi\hbar$. W dolnym lewym rogu motyla Hofstadtera, odpowiadającemu sytuacji, w której strumień pola magnetycznego przechodzącego przez komórkę jednostkową jest bardzo mały, widmo energii elektronów jest bardzo podobne do widma energii prostych poziomów Landaua, tj. składa się z bardzo wąskich pasm (odpowiadających tylko nieznacznie poszerzonym poziomom Landaua) poprzedzielanych szerokimi przerwami. W tej sytuacji liczba całkowita n jest po prostu równa liczbie zapełnionych poziomów Landaua. Jednak gdy strumień pola magnetycznego zwiększa się, poziomy Landaua rozszczepiają się na mający skomplikowaną strukturę układ podpasm rozdzielonych dużą liczbą przerw, które powstają i znikają, w miarę jak zmienia się pole magnetyczne. Pytanie jakie postawili TKNN brzmiało: czym jest definiująca niskotemperaturową przewodność hallowską liczba całkowita n , gdy poziom Fermiego znajduje się wewnątrz jednej z takich nowopowstałych przerw?

Chociaż TKNN rozpatrywali magnetyczną (tj. powiększoną) komórkę jednostkową, stosowało się do niej twierdzenie Blocha, zgodnie z którym elektronowe funkcje falowe muszą być postaci

$$\Psi_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

4. Redakcja PF przeprasza za nie najlepszą czytelność niektórych elementów rycin w tym artykule — takiej jakości ilustracje zawiera oryginalny wykład udostępniony przez Nobel Foundation.

w której $u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ jest periodyczną funkcją położenia \mathbf{r} zdefiniowaną w obrębie magnetycznej komórki jednostkowej (MUC), a \mathbf{k} jest wektorem Blocha definiującym magnetyczną strefę Brillouina (BZ), która w dwóch wymiarach jest topologicznie równoważna torusowi (który z kolei jest równoważny pączkowi z dziurą). Wykorzystując fundamentalny wzór Kubo na przewodność elektryczną TKNN otrzymali następujący wzór

$$\sigma^{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} F_n^{xy}(\mathbf{k}) \right],$$

$$F_n^{xy}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i} \int_{\text{MUC}} d^2\mathbf{r} \left(\frac{\partial u_n^*}{\partial k_x} \frac{\partial u_n}{\partial k_y} - \frac{\partial u_n^*}{\partial k_y} \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right).$$

Wskaźnik n numeruje tu zajęte elektronami pasma energii leżące poniżej poziomu Fermiego. Istotną właściwością [tego wzoru] jest to, że całka po magnetycznej strefie Brillouina z każdej z periodycznych funkcji $F_n^{xy}(\mathbf{k})$ jest równa 2π razy liczba całkowita, co zgadza się z wynikiem Laughlina. TKNN zdali sobie sprawę z tego, że tak musi być, gdyż funkcje $F_n^{xy}(\mathbf{k})$ można zapisać w postaci

$$F_n^{xy}(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial k_x} \mathbf{A}_n^y(\mathbf{k}) - \frac{\partial}{\partial k_y} \mathbf{A}_n^x(\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{A}_n^i(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i} \int_{\text{MUC}} d^2\mathbf{r} \left(u_n^* \frac{\partial u_n}{\partial k_i} - u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial k_i} \right),$$

co prowadzi do kluczowego wzoru wyrażającego przewodność hallowską w postaci całki po brzegu strefy Brillouina (BZB)

$$\sigma^{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{BZB}} dk_i \mathbf{A}_n^i(\mathbf{k}).$$

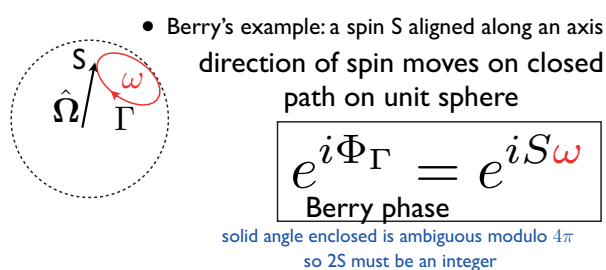
Od Marcela den Nijsa i Petera Nightingale dowiedziałem się, że włączenie do ich pracy (w postaci tylko jednego akapitu) tego ważnego jawnego ogólnego wzoru (zamiast wzorów dotyczących szczególnego modelu Hofstadtera, które były głównym przedmiotem ich pracy) było, jak sobie przypominają, efektem końcowego namysłu, już w trakcie spisywania pracy! Marcel den Nijs twierdził, że przejawem „geniuszu Davida Thoulessa” było wybranie zamiast jakiegoś przypadkowego potencjału (w celu otrzymania poszerzonych poziomów Landaua) uogólnienia w formie potencjału periodycznego; to był krok zasadniczy”. Pokazuje to siłę tkwiącą w wybraniu właściwego modelu, na którym można wykonać analitycznie kompletne obliczenia. Choć i przedtem interesowano się otrzymaniem jakiejś fizycznej realizacji modelu Hofstadtera, nie miał on żadnych związków z rzeczywistymi próbkami, w których obserwowany był całkowity kwantowy efekt Halla, którego modelem właściwym fizycznie i naturalnie narzucającym

się do badania wydawał się zasadniczo nierozwiązywalny model z przypadkowym potencjałem.

Niedługo po ukazaniu się pracy TKNN, Michael Berry odkrył (Berry, 1984) słynną, nazwaną jego imieniem, fazę geometryczną charakteryzującą ewolucję układów kwantowych przy powolnych (adiabatycznych) zmianach warunków zewnętrznych, jakim są one poddane. Klasycznym przykładem podanym przez Berry’ego jest spin S ustawiony wzdłuż pola magnetycznego, którego kierunek reprezentuje jednostkowy wektor $\hat{\Omega}$; kierunek ten z wolna zmienia się powracając po pewnym czasie do wyjściowego. Tym samym wektor $\hat{\Omega}$ zakreśla na jednostkowej sferze pewną zamkniętą drogę. [Tak zwane twierdzenie adiabatyczne mówi, że w granicy nieskończonej powolnej zmiany kierunku pola spin powraca do swojego wyjściowego stanu kwantowego, ale wektor reprezentujący stan końcowy różni się od wyjściowego o czynnik fazowy]. Odkrycie Berry’ego polegało na tym, że [ta] związana ze zmianą kierunku $\hat{\Omega}$ pola faza składa się nie tylko z oczekiwanej części proporcjonalnej do energii [spinu w polu magnetycznym], ale także z części *geometrycznej*, która zależy tylko od kształtu drogi i jest w tym przypadku równa kątowemu bryłowemu ω wyznaczonemu przez drogę wytyczoną na sferze (czyli polu powierzchni na sferze jednostkowej otoczonej zakreśloną na niej zamkniętą drogą) pomnożonemu przez wartość S spinu. Patrząc na to bardziej wnikliwie można zauważyć, że powierzchnia ograniczona wytyczoną na sferze zamkniętą drogą nie jest określona w sposób jednoznaczny i wskutek tego kąt bryłowy ω jest przez nią wyznaczany tylko modulo 4π . Jednak znaczenie fizyczne ma tylko czynnik fazowy $\exp(iS\omega)$, a on jest jednoznaczny, bo $2S$ jest zawsze liczbą całkowitą. Wpływ odkrytej przez Berry’ego fazy geometrycznej na rozwój współczesnych zastosowań mechaniki kwantowej trudno przecenić; wielu badaczy jest zdania, że zasługuje ona na pełniejsze zaprezentowanie w przyszłych wykładach noblowskich.

Zarówno praca Berry’ego, jak i wzór TKNN przyciągnęły uwagę fizyka matematycznego Barry’ego Simona, który zauważył (Simon, 1983), że istnieje między nimi związek: fazę Berry’ego można bowiem uważać albo za całkę z *koneksji Berry’ego* (analog znanego z elektrodynamiki potencjału wektorowego) wzdłuż [zamkniętej] krzywej (drogi), albo, wykorzystując twierdzenie Stokesa, za całkę ze *strumienia Berry’ego* lub z *krzywizny Berry’ego* po powierzchni ograniczonej tą krzywą. Co więcej, jeśli powierzchnia nie posiada brzegu, czyli jest powierzchnią zamkniętą, całkowita [(tj. scałkowana po tej powierzchni)] krzywizna Berry’ego musi być równa całkowitej wielokrotności 2π i ta wielokrotność jest niezmiennikiem topologicznym, zwanym (mówiąc bardziej technicznie) pierwszą klasą Cherna

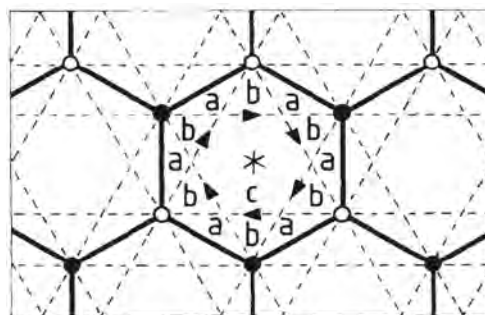
wiązki włóknistej o grupie strukturalnej $U(1)$ (będącej matematyczną charakteryzacją kwantowomechanicznej funkcji falowej) nad dwuwymiarową rozmaitością. Twierdzenie to jest bliskim analogiem twierdzenia Gaussa-Bonneta dotyczącego całki po dwuwymiarowej powierzchni z jej wewnętrznej krzywizny (krzywizny Gaussa). Jeśli powierzchnia taka jest zamknięta, tak jak powierzchnia sfery lub pączka, to topologiczny niezmiennik Gaussa-Bonneta jest równy liczbie dziur (*genusowi* powierzchni); to właśnie ta matematyczna analogia dała początek powszechnemu sposobowi ilustrowania, za pomocą filmu, topologicznej równoważności filizance bajgla lub pączka.



Ryc. 3. Faza Berry'ego związana z adiabaticzną ewolucją kwantowego wektora stanu spinu ustawiającego się wzdłuż zmieniającego się kierunku pola magnetycznego. Faza Φ_Γ jest równa spinowej liczbie kwantowej S pomnożonej przez kąt bryłowy wyznaczony przez zamkniętą drogę Γ zakreślaną na sferze przez wektor $\hat{\Omega}$ zadający kierunek pola. Gdy wektor ten powraca do swego pierwotnego kierunku, końcowy [wektor] stan[ui] spinu jest taki sam, jaki był na początku, tylko jest pomnożony przez czynnik $\exp(i\Phi_\Gamma)$, który zależy w sposób geometryczny od zakreślonej drogi. Ponieważ kąt bryłowy jest przez zakreśloną przez wektor $\hat{\Omega}$ drogę wyznaczony tylko modulo 4π , topologia wymaga, by podwojony spin, $2S$, był (tak jak to zawsze jest w mechanice kwantowej) liczbą całkowitą

Rozpoznanie we wzorze TKNN topologicznego niezmiennika stało się początkiem uświadamiania sobie, że oprócz roli jaką poprzez zidentyfikowanie wzbudzeń topologicznych topologia odegrała w klasycznej fizyce przemiany fazowej Bierzieskiego–Kosterlitz–Thoulessa będzie ona także odgrywać ważną rolę w klasyfikowaniu samych stanów kwantowych. Dany wzorem TKNN niezmiennik (*liczba Cherna* lub *pierwsza klasa Cherna*, równa $\frac{1}{2}\pi$ razy całka z krzywizny Berry'ego po dwuwymiarowej rozmaitości) miał jednak pozostać jedynym znanym fizykom materii skondensowanej aż do odkrycia w roku 2004 przez Kane'a i Mele (Kane i Mele, 2005), nowego niezmiennika \mathbb{Z}_2 odgrywającego rolę w fizyce topologicznych izolatorów. Dopiero to odkrycie doprowadziło do eksplozji nowych eksperymentalnych i teoretycznych odkryć dotyczących topologicznych stanów materii.

Wynik TKNN dotyczył struktury pasmowej widma układu elektronów umieszczonego w jednorodnym polu magnetycznym. W obecności potencjału periodycznego poziomy Landaua ulegają rozszczepieniu na pasma Blocha. W roku 1988, analizując zapropono-



Ryc. 4. Prosty grafenopodobny zabawkowy model o ciasnych wiązkach (Haldane, 1988) będący realizacją *topologicznego izolatora ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu* lub izolatora Cherna wykazującego *anomalny kwantowy efekt Halla* przy zerowym zewnętrznym polu magnetycznym. Elektrony mogą wykonywać przeskoki wzdłuż (zaznaczonych ciągłymi liniami) wiązań najbliższych sąsiadów — przeskokom tym odpowiadają rzeczywiste elementy macierzy [(amplitudy)] — oraz wzdłuż (zaznaczonych liniami przerywanymi) wiązań łączących drugich pod względem wzajemnego oddalenia sąsiadów — takim przeskokom w kierunkach wskazanych strzałkami odpowiada zespolona amplituda o dodatniej fazie. (Dwie kopie takiego modelu — jedna odpowiadająca elektronom o spinie do góry i druga odpowiadająca elektronom o spinie w dół — zostały później połączone przez Kane'a i Mele, aby modelować topologiczny izolator nie łamiący symetrii względem odwrócenia czasu.) [W moim modelu] złamanie tej symetrii wprowadzają niezerowe fazy zespolonych amplitud odpowiadających przeskokom między drugimi co do oddalenia sąsiadami; fazy te mogą być skutkiem występowania w centrum każdej z heksagonalnych komórek ferromagnetycznie uporządkowanych dipoli magnetycznych (zaznaczonych symbolem $*$) skierowanych prostopadle do dwuwymiarowej płaszczyzny. Dipole takie wytwarzają lokalnie strumień pola magnetycznego, który choć scałkowany po całej komórce jest zerowy (dzięki czemu standardowa struktura Blocha pozostaje nienaruszona), ma jednak różne wartości w obszarach zaznaczonych na rysunku literami a , b i c

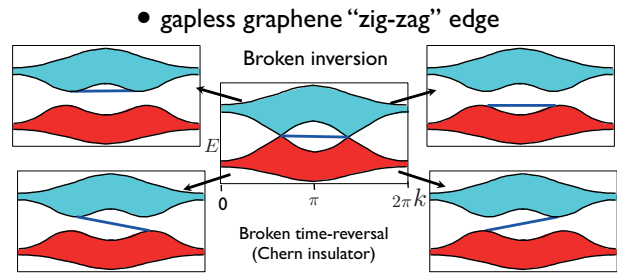
waną przez Fradkina, Dagotto i Boyanovskiego (Fradkin i inni, 1986) realizację *anomalii parzystości* zdałem sobie sprawę z tego, że koniecznym warunkiem wystąpienia efektu Halla nie jest obecność pola magnetycznego, lecz po prostu złamanie symetrii względem odwrócenia czasu. Wniosek ten właściwie powinien być zostać odczytany z samego wyniku TKNN, ale najwyraźniej nie został wcześniej dostrzeżony. Zaproponowałem więc (Haldane, 1988) bardzo prosty układ pokazany na ryc. 4, wzorowany na dwuwymiarowej pojeźdycznej warstwie grafitu (w owym czasie był to czysto zabawkowy model — możliwość, że kiedyś powstanie grafen wydawała się wtedy czystym *science fiction*). Nazwałem go modelem kwantowego efektu Halla bez poziomów Landaua. Jego konstrukcja zamiast zależnych od pola magnetycznego egzotycznych stanów występujących w modelu Hofstadtera wykorzystywała standardowe stany Blocha. Konstrukcję tę nazywa się obecnie modelem *anomalnego kwantowego efektu Halla* albo *izolatorem Cherna*.

Skonstruowany przeze mnie układ można też nazwać pierwszym topologicznym izolatorem, z tym że izolatorem ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu. Okazuje się bowiem, że w dwuwymiarowym grafenie będące wierzchołkami stref Brillouina *punkty Diraca*, w których pasmo przewodnictwa i pasmo walen-

cyjne stykają się ze sobą, są stabilne tylko wtedy, gdy zarówno symetria względem odwrócenia czasu, jak i symetria względem przestrzennego odbicia pozostają nienaruszone: krzywizna Berry'ego jest wtedy tożsamościowo równa zero, a czynniki fazowe Berry'ego odpowiadające zamkniętym drogom w strefie Brillouina są [czysto] topologiczne i mają wartości $\exp(i\varphi) = \pm 1$, zależnie od tego, czy liczba owinięć drogi wokół punktów Diraca jest parzysta, czy nieparzysta. Badany wcześniej przez Semenoffa (Semenoff, 1984) oddzielony przerwą od reszty widma energetycznego nietopologiczny stan izolatorowy powstaje, gdy złamana jest *symetria względem odbicia przestrzennego*. Natomiast w zabawkowym modelu, który ja badałem, przerwa w punktach Diraca tworzy się dzięki złamaniu symetrii względem odwrócenia czasu; jej złamanie wskutek przyjęcia, że amplitudy przeskoków do drugich (co do bliskości) węzłów tej samej podsięci, są zespolone (mają niezerowe tzw. chiralne fazy) powoduje powstanie kwantowego stanu hallowskiego. Gdy tylko utworzy się przerwa zrywająca we wnętrzu układu połączenie pasma przewodnictwa i pasma walencyjnego, pasma te zaczynają mieć przeciwnie liczby Cherna ± 1 ; istnieją też jednokierunkowe stany brzegowe. Najlepiej jest to widoczne na „zygzakowatym” brzegu: ponieważ elektrony nie mają tam możliwości przeskakiwania do drugich co do oddalenia węzłów, stan brzegowy o zerowej energii zajmuje jedną trzecią powierzchni strefy Brillouina, łącząc punkty Diraca w sposób przypominający ten, w jaki stany powierzchniowe zwane *łukami Fermiego*, łączą punkty Diraca trójwymiarowego półmetal Weyla odkrytego ostatnio przez Ashvina Vishwanatha wraz ze współpracownikami (Wan i inni, 2011). Kiedy otwiera się przerwa, albo z powodu złamania symetrii względem odbić, albo symetrii względem odwrócenia czasu, albo obu tych symetrii na raz, stany brzegowe w każdym mającym teraz przerwę punkcie Diraca (tzw. masywnym punkcie Diraca) muszą przyłączyć się albo do pasma walencyjnego, albo do pasma przewodnictwa, co prowadzi do czterech możliwości pokazanych na ryc. 5.

Ten prosty, zabawkowy model okazał się bardzo użyteczny: choć w wersji oryginalnej był modelem nładowanych fermionów, dość nieoczekiwanie został przeobrobiony na model neutralnych bozonów i fotonowego kryształu (Haldane i Raghu, 2008) pokazując, jak w takich układach mogą także powstawać *jednokierunkowe* stany brzegowe. Wynik ten zapoczątkował powstanie dziedziny zwanej fotoniką topologiczną. Stany takie udało się wytworzyć eksperymentalnie w ramach fotoniki mikrofalowej.

Możliwość istnienia niezmienniczego względem odwrócenia czasu analogu efektu Halla (*spinowego efektu Halla*) była w roku 2004 wciąż przedmiotem dyskusji.



Ryc. 5. Zygzakowaty brzeg grafenu po uwzględnieniu zaburzających członów łamiących symetrię względem odbicia przestrzennego lub symetrię względem odwrócenia czasu. Przy braku zaburzenia istnieje stan brzegowy łączący dwa sąsiednie punkty Diraca, w których wypełnione pasmo walencyjne (zaznaczone na czerwono) styka się z niezapełnionym pasmem przewodnictwa (zaznaczonym na zielono). Gdy wprowadzenie zaburzenia spowoduje powstanie przerwy, stan brzegowy może łączyć się z pasmami na cztery różne sposoby. Dwa z nich — połączenie pasm walencyjnego i przewodnictwa — są topologiczne

Pierwszy model spinowego efektu Halla podali dopiero Charles Kane i Eugen Mele (Kane i Mele, 2005). Połączyli oni dwie kopie mojego modelu: jedna kopia reprezentowała elektrony o spinie do góry, których pasmo walencyjne charakteryzowało się liczbą Cherna równą ± 1 , a druga elektrony o spinie w dół, których pasmo walencyjne miało liczbę Cherna przeciwną, tj. równą ∓ 1 . Mody brzegowe elektronów o spinie do góry i o spinie w dół propagowały się w przeciwnych kierunkach. Ponieważ sumaryczna liczba Cherna pasm walencyjnych elektronów o obu kierunkach spinu była równa zero, żaden kwantowy efekt Halla nie występował. Naiwnie można było sądzić, że nic nie zabrania, by nieoddzielone od reszty widma przerwą mody brzegowe rozpraszają się do tyłu i mieszały [z modami we wnętrzu układu], co, po uwzględnieniu sprzężenia spin-orbita typu Rashby'ego, powinno prowadzić do powstania przerwy. Za pomocą obliczeń numerycznych Kane i Mele odkryli jednak, że jeśli tylko niezmienniczość względem odwrócenia czasu nie była złamana, mody brzegowe w istocie nie mieszały się z powodu istnienia wcześniej nieoczekiwanego niezmiennika topologicznego \mathbb{Z}_2 , związanego z degeneracją Kramersa. Ten nowy niezmiennik ma swoje trójwymiarowe uogólnienie, które w tym samym czasie i niezależnie odkryli Joel Moore i Leon Balents (Moore i Balents, 2007), Rahul Roy (Roy, 2009) oraz Liang Fu i Kane i Mele (Fu i inni, 2007). Doprowadziło to do eksperymentalnego odkrycia trójwymiarowych niezmienniczych względem odwrócenia czasu topologicznych izolatorów i, wreszcie, do ogłoszonego przez grupę QiKun Xue z uniwersytetu Tsinghua w Pekinie (Chang i inni, 2013) eksperymentalnego zrealizowania anomalnego kwantowego efektu Halla w cienkich błonach z niezmienniczych względem odwrócenia czasu topologicznych izolatorów domieszkowanych materiałem magnetycznym.

Przejdę teraz do innego (dokonanego w 1981 r.) uhonorowanego tą nagrodą Nobla odkrycia: do nowych stanów typu ciecz spinowa jednowymiarowych antyferromagnetyków zbudowanych z kwantowych spinów całkowitych. Stany takie (w przypadku układów spinów S równych $1, 3, \dots$) zostały ostatnio przez Xiao-Gang Wena i współpracowników (Chen i inni, 2013) zaliczone do klasy *stanów topologicznych chronionych przez symetrię*; w tym przypadku symetrią tą jest niezmienniczość względem odwrócenia czasu i względem odbicia przestrzennego.

Standardowe stany podstawowe jednowymiarowego magnetyka, powszechnie rozpatrywane przed rokiem 1981, były typowo stanami nie wykazującymi splątania. Charakteryzowały się zwykle długozasięgowym uporządkowaniem magnetycznym i można je było modelować jako iloczyn prosty niezależnych stanów spinów S [(całkowitych lub połówkowych)] ulokowanych w kolejnych węzłach. Przykładami takich niesplątanych stanów iloczynowych są np. stan ferromagnetyczny ($\dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$) albo antyferromagnetyk Néela ($\dots \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots$). W pokazanych tu konfiguracjach sąsiednie spiny są ustawione albo równoległe albo antyrównoległe w stosunku do osi z , ale w przypadku (izotropowego) magnetyka Heisenberga stany takie łamią spontanicznie symetrię względem obrotów, bo oś, w stosunku do której są one ustawione albo równoległe, albo antyrównoległe, wyróżnia jeden kierunek (może on być, oczywiście, wybrany dowolnie). W przypadku ferromagnetyka Heisenberga kierunek uporządkowania jest [zarazem] kierunkiem makroskopowego wektora momentu pędu i zachowanie momentu pędu, [obowiązujące w układach, których hamiltonian jest] niezmienniczy względem obrotów, uniemożliwia zmiany ferromagnetycznego „parametru porządku” (czyli kierunku, wzdłuż którego ustawione są spiny) przez fluktuacje.

W przypadku antyferromagnetyka nie ma jednak zasady zachowania, która by chroniła strukturę stanu podstawowego przed skutkami fluktuacji. Słynne twierdzenie Mermin–Wagnera, które w przypadku zachodzącej przy niezerowej temperaturze przemiany fazowej Kosterlitz–Thoulessa było przyczyną paradoksu, ma, w przypadku jednowymiarowych układów kwantowych, podobne konsekwencje: stan podstawowy jednowymiarowego układu kwantowego, którego hamiltonian jest niezmienniczy względem symetrii ciągłej, nie może, bez istnienia zabezpieczających go praw zachowania, wykazywać długozasięgowego uporządkowania charakteryzującego się łamiącą tę symetrię niezerową wartością parametru porządku. W wyższych wymiarach układ spinów Heisenberga może mieć łamiący symetrię ferromagnetyczny stan podstawowy i nieodzielone odeń w widmie energetycznym przerwy wzbudzenia

Goldstonowskie znane jako (antyferromagnetyczne) fale spinowe, które są małymi harmonicznymi fluktuacjami parametru porządku wokół jego jednorodnej w stanie podstawowym konfiguracji. Jednak w przypadku jednowymiarowego antyferromagnetyka o spinie S , gdyby nawet przyjąć założenie, że wystąpiło długozasięgowe antyferromagnetyczne uporządkowanie typu Néela stanu podstawowego, to, jak łatwo stwierdzić, skutkiem harmonicznymi fluktuacji występujących w stanie podstawowym byłoby zniszczenie takiego założonego długozasięgowego uporządkowania.

W tym miejscu do opowieści tej wkracza, okazuje swoją moc i wprowadza zamieszanie ścisły (ale nie w pełni zrozumiany) matematyczny wynik! W roku 1931 Hans Bethe (który później miał zostać opiekunem pracy doktorskiej Davida Thoulessa na uniwersytecie Cornell), zanim jeszcze odkrył, jak reakcje jądrowe zasilały Słońce, pracował m.in. nad jednowymiarowym łańcuchem Heisenberga traktowanym jak zabawkowy model magnetyzmu. Wymyślił wtedy (Bethe, 1931) ważny *Ansatz* noszący dziś jego imię (tzw. *Ansatz* Bethego), który dawał ściśle rozwiązanie problemu stanów własnych modelu jednowymiarowego układu spinów $S = \frac{1}{2}$ oddziałujących każdy tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami i umożliwiał otrzymanie w jawnej postaci widma wartości własnych takiego układu. Zrozumienie stojącej za tym wynikiem struktury matematycznej zajęło jednak niestety ponad sześć dziesięcioleci i w latach siedemdziesiątych XX w. z tego ścisłego rozwiązania wciąż udawało się znajdować jedynie poziomy energetyczne układu i jego właściwości termodynamiczne, ale nie funkcje korelacji. Otrzymywane za pomocą *Ansatzu* Bethego widmo energii najniższych wzbudzeń układu spinów pozornie przypominało przewidywania teorii fal spinowych z tym wszakże, że przewidywana w ten sposób prędkość [rozchodzenia się] fal o dużej długości różniła się od ich prędkości przewidywanej przez teorię fal spinowych o czynnik $\pi/2$.

Choć szczegóły *Ansatzu* Bethego były dość niejasne i wymagały pewnego wtajemniczenia, powszechnie uznawano, iż jest on dowodem na to, że obraz fal spinowych jest mniej więcej poprawny, mimo znanego faktu niszczenia długozasięgowego uporządkowania przez efekty kwantowe. Dziś wiemy, że elementarne wzbudzenia występujące w modelu, który rozwiązał Bethe, nie mają w istocie *żadnego związku z falami spinowymi* — są one powstającymi parami topologicznymi wzbudzeniami układu spinów $\frac{1}{2}$ (Fadiejew i Tachtdżan, 1981), które teraz nazywa się *spinonami*. Nawet jednak w latach siedemdziesiątych powinno być się zauważyć, że ciepło właściwe wyrażone przez prędkość rozchodzenia się wzbudzeń o dużej długości fali przewidywane przez teorię fal spinowych jest dokładnie dwu-

krotnie większe niż przewidywane przez ścisły Ansatz Bethego, co oznacza, że nie ma żadnego związku między teorią fal spinowych i niskoenergetycznymi wzbudzeniami rozwiązywalnego modelu Bethego.

W początku lat siedemdziesiątych z prac Alana Luthera i Ingo Peschela wyłoniła się nowa technika pozwalająca obejść od dawna nierozwiązywalny problem otrzymania funkcji korelacji z rozwiązania Bethego. Znow ważna okazała się pewna stara (jeszcze starsza niż ta Bethego!) praca: Luther i Peschel wykorzystali mianowicie transformację Jordana-Wignera (Jordan i Wigner, 1928) odwzorowującą jednowymiarowy magnetyk, czyli łańcuch spinów $S = \frac{1}{2}$ z oddziaływaniem najbliższych sąsiadów, na model bezspinowych fermionów przemieszczających się w jednym wymiarze dzięki przeskokom między najbliższymi węzłami sieci, powodowanym przez wzajemne oddziaływanie cząstek znajdujących się w sąsiednich węzłach. Jeśli wymienne oddziaływanie Heisenberga mające postać sprzężenia $J \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}$ uogólni się do postaci $J^x S_n^x S_{n+1}^x + J^y S_n^y S_{n+1}^y + J^z S_n^z S_{n+1}^z$ i przyjmie $J^z = 0$ oraz $J^x = J^y = J^{xy}$, wówczas kwantowy model XX oddziaływania spinów $S = \frac{1}{2}$ zostaje odwzorowany na model nieoddziałujących wzajemnie, czyli swobodnych fermionów, który może być do końca jawnie rozwiązany, a jego właściwości fizyczne [(w tym funkcje korelacji)] zbadane.

Wcześniej, bo już w połowie lat sześćdziesiątych, Joaquin Luttinger (Luttinger, 1963) zauważył, że „zabawkowy” model oddziałujących bezspinowych fermionów o liniowym, typu dirakowskiego, związku dyspersyjnym i oddziaływaniu ograniczonym do rozpraszania do przodu z małym przekazem pędu, powinien być ściśle rozwiązywalny przy wykorzystaniu *bozonów Tomonagi* wprowadzonych przez Sin-itiro Tomonagę (Tomonaga, 1950). Gdy występujące początkowo problemy z rozwiązaniem Luttingera zostały wyjaśnione przez Daniela Mattisa i Elliota Lieba (Mattis i Lieb, 1965), wyrosła z tego ważna technika „bozonizacji” (pozwalająca reprezentować jednowymiarowe układy fermionów w języku modów oscylatora harmonicznego Tomonagi), która została jawnie sformułowana przez Schotte’go i Schotte’go (Schotte i Schotte, 1969) w ich pracy z 1969 roku poświęconej uproszczonemu traktowaniu problemu *osobliwości brzegowych promieni X*.

W roku 1975 Luther i Peschel (Luther i Peschel, 1975) zaadaptowali tę nową technikę bozonizacji do modelu antyferromagnetyka o niezerowym sprzężeniu $J^z = \lambda |J^{xy}|$ z $\lambda < 1$, tj. antyferromagnetyka mającego tzw. łatwą płaszczyznę. Odwzorowali ten model na pewną efektywną kwantową teorię pola w dwóch (1 + 1) wymiarach, którą z kolei można badać odwzorowując ją metodą bozonizacji na problem oscylatora harmonicznego. Znalezione w wyniku zastosowania takiego podej-

ścia (i po dokonaniu tzw. obrotu Wicka pozwalającego zamiast teorii pola w 1 + 1-wymiarowej przestrzeni Minkowskiego rozpatrywać tę samą teorię pola w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej), [stan podstawowy układu] był całkowicie równoważny niskotemperaturowej *uporządkowanej topologicznie* fazie klasycznego, badanego w tym samym czasie przez Kosterlitz i Thoulessa, dwuwymiarowego modelu XX o funkcjach korelacji typu Néela, zanikających według obowiązującego przy dużych wartościach różnicy $|n - n'|$ prawa potęgowego

$$\begin{aligned} \langle S_n^x S_{n'}^x \rangle &= \langle S_n^y S_{n'}^y \rangle \sim (-1)^{n-n'} |n - n'|^{-\eta}, \\ \langle S_n^z S_{n'}^z \rangle &\sim (-1)^{n-n'} |n - n'|^{-1/\eta}, \end{aligned}$$

z nieuniwersalnym, bo zależącym od wartości stałej sprzężenia λ , wykładnikiem η . Przyjęcie następnie całkowitej nieizotropowości, tj. $J^x \neq J^y$, odwzorowuje ten model (model XY) na teorię pewnego masywnego pola (na tzw. *model sinus-Gordona*), którego wzbudzenia oddziela od stanu podstawowego przerwa energetyczna o szerokości zależnej od różnicy $J^x - J^y$ potęgowo, przy czym wykładnik potęgi jest wyznaczony przez parametr η .

W owym czasie ściśle rozwiązanie Bethego izotropowego (o $J^x = J^y = J^z$) modelu XXX Heisenberga oddziałujących spinów $S = \frac{1}{2}$ zostało już przez Rodneya Baxtera uogólnione na w pełni nieizotropowy model XYZ, co stało się możliwe dzięki zidentyfikowaniu algebry Baxtera–Yanga jako kluczowego elementu, który sprawia, że korzystając z Ansatzu Bethego daje się otrzymać rozwiązanie także i tego modelu. Luther i Peschel mogli więc wykorzystać tę informację, by w sposób okrężny otrzymać w funkcji parametru λ wartość wykładnika η charakteryzującego funkcje korelacji modelu XXZ mającego łatwą płaszczyznę (tj. o $|\lambda| < 1$). Ustalili oni, że gdy sprzężenie J^z jest dodatnie (co odpowiada antyferromagnetykowi) wykładnik η rośnie od wartości $\frac{1}{2}$, jaką ma w punkcie $\lambda = 0$ (tj. gdy $J^z = 0$), odpowiadającym w pełni rozwiązywalnemu modelowi XX nieoddziałujących fermionów, osiągając wartość $\eta = \eta^{-1} = 1$ przy $\lambda = 1$, co odpowiada heisenbergowskiemu modelowi XXX antyferromagnetyka. Natomiast przy ujemnym sprzężeniu J^z (odpowiadającym ferromagnetykowi) wykładnik η maleje osiągając wartość zero przy $\lambda = -1$, kiedy to stan podstawowy układu staje się dalekozasięgowo uporządkowany, a parametr porządku staje się wielkością zachowaną. Teoriopolowe podejście Luthera–Peschela nie było jednak w stanie objaśnić pojawiania się przy $\lambda > 1$ przerwy energetycznej, kiedy to model nie odpowiada już antyferromagnetykowi mającemu łatwą płaszczyznę, lecz antyferromagnetykowi o łatwej osi.

W roku 1979 pracowałem nad dokładnym sformułowaniem metody bozonizacji i ustaliłem (Haldane,

1981b), że mody o zerowym pędzie gęstości fermionów powinny być reprezentowane przez zmienne typu działanie-kąt, a nie przez mody oscylatora harmonicznego Tomonagi, które reprezentują mody mające niezerowy pęd. Owe stopnie swobody działanie-kąt mają naturę topologiczną, co rozwiązało zagadkę, w jaki sposób w jednym wymiarze fermiony mogą być reprezentowane przez bozony (mody oscylatora harmonicznego): konstrukcja tej reprezentacji wykorzystuje w istocie oscylatory harmoniczne oraz stopnie swobody odpowiadające topologicznej liczbie nawinięć. Oznacza to, że na widmo wzbudzeń modelu bezspinowych fermionów spełniających periodyczne warunki brzegowe składają się dwa rodzaje wzbudzeń topologicznych (charakteryzowanych dwiema oddzielnymi liczbami nawinięć: propagujących się w prawo i propagujących się w lewo pół fermionowych) oraz mody fal dźwiękowych Tomonagi.

Znajomość energii dwóch topologicznych wzbudzeń pozwoliła wyznaczyć nie tylko wartość prędkości dźwięku, którą można było sprawdzić innym, niezależnym sposobem, ale także wykładnik η charakteryzujący funkcje korelacji. Stosując te wyniki do wykorzystującego Ansatz Bethego rozwiązania modelu XXZ z zerowym zewnętrznym polem magnetycznym (lub równoważnego mu poprzez transformację Jordana–Wignera modelu połowicznie zapełnionego pasma fermionów), mogłem się przekonać, że nowe wzory wyrażające wykładnik η przez energie wzbudzeń topologicznych i ich liczby nawinięć zgadzają się w tym przypadku ze znaną w sposób okrężny przez Luthera i Peschela dokładną zależnością tego wykładnika od sprzężeń i są, wobec tego, poprawne i całkowicie ogólne.

Wynik ten stworzył możliwość otrzymania z rozwiązania wykorzystującego Ansatz Bethego ścisłych wykładników charakteryzujących funkcje korelacji pewnych jednowymiarowych układów wykazujących krytyczne zachowanie poprzez dopasowanie energii różnych ich topologicznych wzbudzeń do tego, co nazywałem (Haldane, 1981b) efektywną *cieczą Luttingera* (albo, może bardziej właściwie, *cieczą Tomonagi–Luttingera*) reprezentowaną przez model Luttingera. Wyniki te otrzymano jeszcze przed pojawieniem się silniejszych metod, wykorzystujących konforemną teorię pola w dwóch (1 + 1) wymiarach, w ramach których *ciecze Luttingera* okazują się układami, które wobec braku ograniczeń nakładanych przez niezmienniczość lorentzowską dają się rozłożyć na abelowe reprezentacje algebry Virasoro.

Gdy rozpatrzyłem z tego nowego punktu widzenie pełną przestrzeń parametrów wykorzystujących Ansatz Bethego rozwiązań łańcucha spinów XXZ (co w przypadku pasm fermionowych o zapełnieniu odbiegającym od połowicznego wymagało numerycznego rozwią-

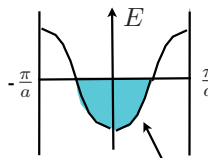
zowania równania całkowego, do którego prowadzi Ansatz Bethego), rzut oka na wyniki natychmiast ujawnił, że elementem, którego brakowało w pracy Luthera i Peschela, był proces typu *umklapp* (zagięcia w j. niem), dzięki któremu przy połowicznym zapełnieniu pasma pęd układu zmienia się w wyniku rozpraszania o $4k_F$ (czyli o wektor Bragga); dwa *lewobieżne* elektrony o niskich energiach (każdy o pędzie bliskim $-k_F$) mogą w wyniku takiego procesu przejść w dwa elektrony *prawobieżne* (każdy o pędzie bliskim k_F).

Na pierwszy rzut oka [proces ten] powinien być reprezentowany członem [oddziaływania] $\Psi_R^\dagger(x)\Psi_R^\dagger(x)\Psi_L(x)\Psi_L(x)$. Człon taki jest jednak niedozwolony z powodu zakazu Pauliego. (Wyjaśnia to prawdopodobnie, dlaczego proces *umklapp* nie został wzięty pod uwagę w oryginalnej pracy Luthera i Peschela). Dozwolony jest jednak człon następnego rzędu postaci $(\Psi_R^\dagger(x)\partial_x\Psi_R^\dagger(x))(\Psi_L(x)\partial_x\Psi_L(x))$, który po „zbożonizowaniu” daje człon $\cos 2\theta \equiv \cos(2(\varphi_R(x) - \varphi_L(x)))$. Proces *umklapp* jest w kwantowym analogu przemiany Bierezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa przejściem polegającym na *rozdzieleniu się podwójnego wiru*. Takie przejście jest dozwolone, podczas gdy przejście polegające na *rozdzieleniu się pojedynczego wiru* jest zabronione przez zasadę zachowania pędu. W modelu kwantowej teorii pola w dwóch (1 + 1) wymiarach analogiem zwykłego procesu rozdzielania się pojedynczego wiru z dwuwymiarowej teorii klasycznej byłby [proces reprezentowany przez człon] $\cos \theta$, który staje się istotny⁵ (i prowadzi do powstania przerwy w widmie) gdy $\eta > \frac{1}{4}$. Uogólniając: człon $\cos(m\theta)$ staje się istotny, gdy $\eta > \frac{1}{4}m^2$, co doskonale zgadza się z tym, że człon

$$H = \sum_i \frac{1}{2}(S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+) + \lambda S_i^z S_{i+1}^z$$

$\lambda < 1$ easy plane $\lambda > 1$ easy axis

$$H = \sum_i \frac{1}{2}(c_i^+ c_{i+1} + c_{i+1}^+ c_i) + \lambda(n_i - \frac{1}{2})(n_{i+1} - \frac{1}{2})$$



$\lambda = 0$ free fermions

$4k_F = \frac{2\pi}{a}$ (Bragg vector)

“Umklapp processes”

Half-filled band (in zero magnetic field)

Ryc. 6. Transformacja Jordana–Wignera odwzorowuje heisenbergowski łańcuch spinów $S = \frac{1}{2}$ o zerowym namagnesowaniu w połowicznie zapełnione pasmo oddziałujących bezspinowych fermionów; $4k_F$ jest tu wektorem Bragga

5. W sensie klasyfikacji operatorów występujących w hamiltonianie kwantowej teorii pola na istotne, marginalne i nieistotne, albo inaczej, na superrenormalizowalne, renormalizowalne i nierenormalizowalne (przyjp. tłum.).

$\cos 2\theta$, powodujący [proces będący analogiem] rozdzielania się podwójnego wiru, staje się istotny (przy braku członu $\cos \theta$) dokładnie wtedy, gdy model staje się typu XXX, tj. izotropowy i wykładnik krytyczny $\eta = 1$.

Uwzględnienie tego elementu dopełniło teoriopolo-
lowy obraz [układu oddziałujących] spinów $S = \frac{1}{2}$, pod
który podwaliny położyli Luther i Peschel. Zlikwido-
wało także pozornie wyróżniony status modelu spinów
 $S = \frac{1}{2}$, który wydawał się wynikać z możliwości odwzo-
rowania go na model fermionów. Bozonizacja pozwoliła
teraz reprezentować [takie układy] przez dwa *chiralne*
(lewo- i prawobieżne) [charakteryzujące się] topologicz-
nymi liczbami nawinięć pola $\varphi_L(x)$ i $\varphi_R(x)$, nie mające
żadnego oczywistego związku z wartością S spinu cha-
rakteryzującą wyjściowy łańcuch spinowy.

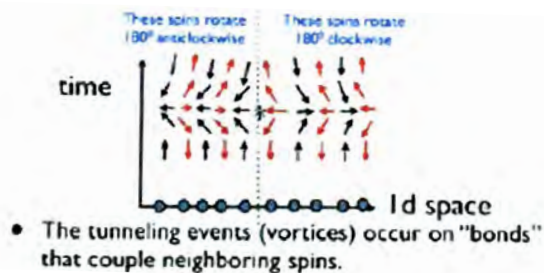
Płaski układ spinów typu XY można obrazowo
przedstawić jako zbiór „igieł kompasów” wskazujących
w każdym punkcie dwuwymiarowej płaszczyzny pe-
wien kierunek $(\cos(\varphi(x)), \sin(\varphi(x)))$. Jeśli układ speł-
nia periodyczne warunki brzegowe na okręgu o obwo-
dzie równym L , to musi zachodzić równość $\varphi(x + L) =$
 $\varphi(x) + 2\pi W$. Liczba W jest tu topologicznym niezmienn-
nikiem, *liczbą nawinięć*, który nie może się zmienić, je-
śli pole $\varphi(x)$ zmienia się z położeniem x w sposób
gładki. W klasycznym dwuwymiarowym modelu XY
pole $\varphi(x, y)$ jest gładkie wszędzie z wyjątkiem punktów
osobliwych (x_0, y_0) , w których znajdują się centra wir-
rów. W modelu kwantowym sformułowanym w $1 + 1$
wymiarach, punkty takie stają się punktami (x_0, t_0) cza-
soprzestrzeni i reprezentują miejsca zajścia procesów
tunelowania (które nazwano *instantonami*), będących
osobliwymi procesami zachodzącymi niemal całkowi-
cie w punkcie x_0 w krótkim odcinku czasu wokół t_0 ,
w wyniku których zmienia się liczba nawinięć.

Okazało się, że w przypadku łańcucha spinów
 S mającego łatwą płaszczyznę i zerowe namagne-
sowanie w kierunku osi z typowo zachodzi zwy-
kły jednowirowy proces instantonowy Bierzieskiego-
Kosterlitz-Thoulessa. Proces taki jest jednak wzbro-
niony przez *ściśłą kwantową interferencję*, gdy $2S$
jest liczbą nieparzystą. Uwypukla to różnicę istnie-
jącą między klasyczną mechaniką statystyczną prze-
miany Bierzieskiego-Kosterlitz-Thoulessa w dwóch
wymiarach i jej kwantową wersją w $1 + 1$ wymiarach. W
przypadku modelu klasycznego wiru wnoszą do czyn-
nika Boltzmannowskiego przyczynę, który ma postać
rzeczywistego i dodatniego czynnika zwanego lotno-
ścią; w kwantowym modelu w $1 + 1$ wymiarach przyczy-
nek ten jest zespoloną amplitudą tunelowania między
topologicznie różnymi konfiguracjami [pola] o różnych
liczbach nawinięć; w modelach niezmienniczych wzglę-
dem odwrócenia czasu jest on rzeczywisty, ale może być
ujemny bądź dodatni. Oznacza to, że między konkuru-

jącymi między sobą procesami instantonowymi może
zachodzić kwantowa interferencja.

W tym szczególnym przypadku procesy tunelowa-
nia są skoncentrowane na środkowym punkcie *złącza*
pomiędzy dwoma sąsiednimi spinami. Przy założeniu,
że łańcuch spinów jest niezmienniczy względem prze-
strzennych przesunięć o jeden węzeł, *wartość* amplitudy
tunelowania musi być zawsze taka sama, niezależnie od
tego, na którym złączu proces ten zachodzi. Kiedy jed-
nak dwa takie procesy zachodzą na kolejnych złączach,
różnią się one przede wszystkim tym, że spin [znajdu-
jący się pomiędzy tymi złączami], który przy jednym
procesie obracał się o 180° zgodnie z ruchem wskazówki
zegara, przy drugim procesie obraca się o też 180° , ale
w przeciwną stronę. Oba te procesy różnią się więc na
czysto o obrót tego jednego spinu o 360° ; ewolucja po-
zostałych spinów [przy obu tych procesach] jest zasad-
niczo taka sama. Fundamentalna różnica między łańcu-
chami spinów całkowitych i łańcuchami spinów połów-
kowych polega na tym, iż w przypadku tych drugich
w rezultacie takiego obrotu stan układu zmienia znak. Je-
śli związany z procesem obrotu przekaz energii jest taki
sam, niezależnie od złącza, na którym obrót zachodzi,
oznacza to wystąpienie interferencji amplitud odpowia-
dających tunelowaniu poprzez instantony na kolejnych
złączach i interferencja ta jest destruktywna, gdy spiny
są połówkowe, a konstruktywna, gdy spiny są całkowite.

Daje to topologiczne wyjaśnienie, dlaczego proces
instantonowy, który staje się istotny, gdy anizotropia
układu XXZ spinów $S = \frac{1}{2}$ zmienia się z anizotropii
typu łatwej płaszczyzny na typy łatwej osi, odpo-
wiada rozdzielaniu się *podwójnego wiru* w przemianie
Bierzieskiego-Kosterlitz-Thoulessa. Proces taki po-
woduje tylko niestabilność topologicznie uporządkowa-
nej fazy układu o łatwej płaszczyźnie ponieważ, gdy
spin S jest połówkowy, efekty dominującego procesu
odpowiadającego pojedynczemu wirowi są znoszone
przez destruktywną interferencję. Gdy jednak spin S
jest całkowity, efekty tego ostatniego procesu są wzmac-
niane przez interferencję i przemiana BKT zachodzi,
gdy tylko wykładnik η charakteryzujący funkcje kore-
lacji dochodzi do wartości granicznej $\eta = \frac{1}{4}$, przy któ-
rej istotne staje się tunelowanie między stanami o róż-
nych liczbach nawinięć; topologiczne uporządkowanie
zostaje wtedy zniszczone i w widmie wzbudzeń po-
wstaje przerwa. W punkcie krytycznym korelacje Néela
 $\langle S_n^x S_{n'}^x \rangle$, $\langle S_n^y S_{n'}^y \rangle$ zanikają dużo szybciej, niż korelacje
 $\langle S_n^z S_{n'}^z \rangle$, co oznacza, że przemiana zachodzi zanim jesz-
cze układ stanie się izotropowym układem Heisenberga.
Jest to także przemiana, w której stan podstawowy
układu staje się jednoznaczny (singletowy), natomiast
gdy istotny jest [dopiero] proces dwuwirowy, prowa-
dzi on do dwukrotnie zdegenerowanego (dubletowego)



Ryc. 7. W $1 + 1$ -wymiarowej czasoprzestrzeni analogiem wirów występujących w modelu sformułowanym w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej są instantonowe procesy tunelowania, w wyniku których ulega zmianie topologiczna liczba nawinięć łańcucha spinów mającego łatwą płaszczyznę. Proces taki jest ześrodkowany na złączeniu pomiędzy kolejnymi węzłami, w których lokalny parametr porządku Néela staje się nieciągły na bardzo krótki czas

stanu podstawowego, ponieważ zachowuje liczbę nawinięć modulo 2.

Dzięki tym wynikom stało się jasne, że uszeregowanie modeli antyferromagnetyków od mających łatwą płaszczyznę do mających łatwą oś ma zupełnie inny charakter, gdy spin S jest całkowity i gdy jest połówkowy. Gdy wzrasta wartość parametru λ łańcucha spinów połówkowych, przy wartości $\lambda = 1$ zachodzi bezpośrednio podwójna przemiana BKT od topologicznie uporządkowanego antyferromagnetyka o łatwej płaszczyźnie i bez przerwy [w widmie energii], gdy $\lambda < 1$, do mającego przerwę antyferromagnetyka o łatwej osi i dubletowym, łamiącym symetrię stanie podstawowym Isinga–Néela, gdy $\lambda > 1$. Natomiast w przypadku łańcucha spinów całkowitych przy $\lambda = \lambda^c < 1$ zachodzi zwykła przemiana BKT do stanu cieczy spinowej o niełamiącym żadnej symetrii singletowym stanie podstawowym, a dopiero po niej, przy $\lambda = \lambda^c > 1$, następuje druga przemiana typu Isinga do charakteryzującego się łatwą osią stanu Isinga–Néela.

Ujawnia to fundamentalną topologiczną różnicę istniejącą między antyferromagnetycznymi (izotropowymi) łańcuchami spinów Heisenberga o spinach S całkowitych i połówkowych. Różnica ta podważyła powszechny wcześniej pogląd, że wartość S spinu pełni tylko rolę parametru rozwinięcia według potęg $1/S$ analogicznego do semiklasycznego rozwinięcia według potęg stałej Plancka \hbar . Zgodnie z tym poglądem asymptotyczne długozasięgowe zachowanie funkcji korelacji $\langle \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n'} \rangle$ powinno mieć postać $(-1)^{n-n'} |n - n'|^{-\eta}$ z wykładnikiem $\eta(S^{-1})$ będącym gładką funkcją argumentu S^{-1} , znikającą, gdy $S^{-1} \rightarrow 0$.

Moje — w roku 1981 heretyckie — stwierdzenie, że istnieje fundamentalna różnica między jednowymiarowymi kwantowymi antyferromagnetykami o spinach S całkowitych i połówkowych, było przypuszczalnie najmniej uzasadnione i moja praca w pierwotnej swojej wersji (Haldane, 1981a) została odrzucona przez kilka

czasopism; sceptycy nazywali zawarte w niej stwierdzenie hipotezą i to określenie, jak się wydaje, do niego przylgnęło! Praca ta, zanim została w końcu opublikowana (Haldane, 1983), została w dużym stopniu napisana na nowo, by lepiej omówić przypadek izotropowego modelu Heisenberga, a pierwotny jej preprint — tak się wydawało — w końcu zaginął, gdyż były to czasy zanim preprinty zaczęły być archiwizowane w internecie. Szczęśliwie odzyskałem niedawno jego kopię — przechował ją Jenő Sólyom — i umieściłem ją w celach historycznych w internetowym archiwum arXiv (Haldane, 1981a). Późniejsze studia Boteta i Julliena (Botet i Jullien, 1983) wykorzystujące ścisłą numeryczną diagonalizację potwierdziły stwierdzenia zawarte w tej pracy, a rozpraszania neutronów na quasi-jednowymiarowych organicznych związkach NENP niklu zbadane przez Billa Buyersa (Buyers i inni, 1986) dostarczyło w końcu eksperymentalnego dowodu na to, że stan podstawowy antyferromagnetyka o spinie $S = 1$ jest stanem singletowym i że widmo energii takiego ferromagnetyka ma przerwę.

Bardziej zasadniczym powodem, dla którego mój wynik z 1981 roku był tak nieoczekiwany było to, że stan cieczy spinowej łańcucha spinów $S = 1$ był pierwszym przykładem *topologicznej materii kwantowej*. Wyprzedził on dokonane przez Berry'ego w roku 1983 odkrycie fazy nazwanej jego imieniem, której istnienie potwierdziło fakt, że w przypadku układów spinowych spinowa liczba kwantowa S odgrywa rolę topologiczną, ponieważ wielkość $2S$ jest zawsze liczbą całkowitą. Patrząc przez pryzmat używanego przez fizyków materii skondensowanej sformułowania hamiltonowskiego, bardzo tajemnicze wydawało się to, iż mechanikę kwantową do wykorzystującej ciągle pola teorii antyferromagnetycznego łańcucha spinów, opartej na tzw. nieliniowym $O(3)$ -symetrycznym modelu sigma, trzeba — jak się wydawało — stosować inaczej w przypadku spinów połówkowych, a inaczej w przypadku spinów całkowitych. W roku 1983 bardzo pomocnej wskazówki dostarczyła rozmowa, jaką odbyłem z Edwardem Wittenem. Wspomniał w niej, że w lagranżowskim sformułowaniu faworyzowanym przez fizyków cząstek elementarnych, w lagranżjanie modelu sigma⁶ może występować dodatkowy *człon topologiczny*, który nie występuje w formalizmie hamiltonowskim i znika całkowicie w granicy klasycznej. Człon taki jest proporcjonalny do parametru zwanego kątem θ . Można też łatwo pokazać, wykorzystując podejście odwołujące się do faz Berry'ego związanych z trajektoriami zakreślonymi przez ewoluujące poszczególne spiny, że kąt ten musi być równy $2\pi S$,

6. Model sigma pełni w fizyce cząstek elementarnych rolę efektywnej teorii oddziaływań niskoenergetycznych mezonów, takich jak mezony π , kaony itp. (przyp. tłum.)

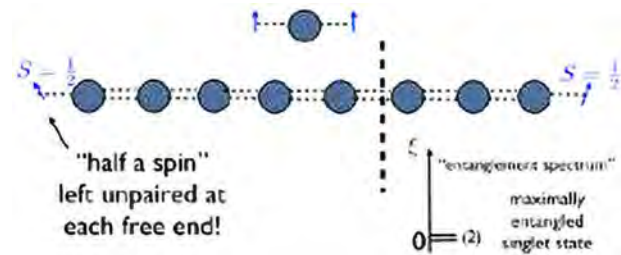
czyli musi przyjmować wartość 0 modulo 2π , gdy spiny są całkowite i wartość π modulo 2π , gdy spiny są półowkowe (są to też jedyne dwie wartości parametru θ zgodne z symetrią odwrócenia czasu). Parametr θ ma związek z kątem aksjonowym wprowadzonym w fizyce wysokich energii w celu rozwiązania problemu niełamania parzystości kombinowanej CP przez oddziaływania silne,⁷ oraz z analogicznym kątem wprowadzonym całkiem niedawno w elektrodynamicznej teorii silnie topologicznych izolatorów przez Xiao-Liang Qi, Taylora Hughesa i Shouchenga Zhanga (Qi i inni, 2008); w tej teorii przyjmuje on wartość $\theta = 0$ w przypadku nietopologicznych izolatorów respektujących symetrię odwrócenia czasu i wartość $\theta = \pi$ w przypadku trójwymiarowych silnie topologicznych izolatorów zachowujących tę symetrię. Odkrycie możliwości występowania członu θ w lagranżowskim sformułowaniu teorii pola jednowymiarowych antyferromagnetyków wydaje się cezurą, po której lagranżowskie sformułowanie stało się powszechnie stosowanym w teoretycznej kwantowej fizyce materii skondensowanej i jest obecnie standardowym narzędziem uzupełniającym podejście hamiltonowskie.

Prosty modelowy stan, ujmujący istotę oddzielnego przerwy od reszty widma stanu jednowymiarowego antyferromagnetyka zbudowanego ze spinów całkowitych, został później skonstruowany przez Iana Afflecka, Toma Kennedy'ego, Hala Tasaki i Elliota Lieba (Affleck i inni, 1987). Jest to także ścisły stan podstawowy zmodyfikowanego zabawkowego modelu AKLT. Przykład ten jest wyjątkowo pouczający, gdyż pokazuje szczególność natury kwantowego splątania stanu topologicznego. W konstrukcji AKLT obiekt o spinie 1 jest przedstawiony jako symetryczny stan dwóch spinów $\frac{1}{2}$, półspinów, z których każdy, przez sparowanie się z jednym z sąsiadujących z nim półspinów, może tworzyć splątany stan singletowy

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

wiązania walencyjnego. Jeśli końce łańcucha spinów $S = 1$ są swobodne (tzn. jest on *otwarty*), to na każdym z nich pozostaje jeden niesparowany spin $\frac{1}{2}$. Model ten ujawnia zasadniczo splątana naturę stanu [łańcucha spinów całkowitych]: jeśli łańcuch taki rozetniemy na dwie części, po obu stronach rozcięcia pojawią się niesparowane spinowe stopnie swobody o $S = \frac{1}{2}$. *Spektrum splątania* takiego modelowego stanu jest więc bardzo charakterystycznym prostym spektrum pojedynczego dubletu spinów $\frac{1}{2}$ (Li i Haldane, 2008). To, że wszystkie stany w widmie splątania są dubletami i że na swobodnych

końcach długiego otwartego łańcucha spinów zlokalizowane są lokalne stopnie swobody spinu $\frac{1}{2}$ (ryc. 8), jest cechą wszystkich stanów należących do tej samej topologicznej klasy stanów co modelowy stan AKLT, włączając w to także standardowy antyferromagnetyk Heisenberga zbudowany ze spinów $S = 1$, który badałem wcześniej.



Ryc. 8. W konstrukcji AKLT stanu podstawowego układu spinów $S = 1$, każdy spin $S = 1$ jest traktowany jak symetryczna kombinacja dwóch półspinów $S = \frac{1}{2}$, z których jeden tworzy singletowe wiązanie walencyjne z półspinem sąsiadującym z nim z prawej strony, a drugi z półspinem sąsiadującym z nim z lewej strony. Na każdym z otwartych krańców łańcucha pozostaje niesparowany jeden spin $S = \frac{1}{2}$ i widmo splątania składa się z pojedynczego dubletu

Mimo iż na końcach każdego łańcucha całkowitych spinów S istnieją lokalne stopnie swobody spinów $\frac{1}{2}S$ i ponieważ elementarnymi wzbudzeniami całego układu, oddzielnymi od stanu podstawowego przerwy, są magnony o spinie 1, których stany mogą być zlokalizowane na krańcach łańcucha, spiny tam ulokowane są topologicznie chronione tylko wtedy, gdy S jest *nieparzystą* liczbą całkowitą. Ostateczna klasyfikacja (Chen i inni, 2013) jest więc taka, że tylko stan łańcucha spinów o S będącym nieparzystą liczbą całkowitą jest chronionym przez symetrię (symetrią tą jest albo symetria względem odwrócenia czasu lub symetria względem odbicia przestrzennego) stanem topologicznym (czyli tzw. stanem SPT) charakteryzującym się typową podwójną degeneracją stanów w widmie splątania.

Wieloletnie badania topologicznego stanu antyferromagnetyka Heisenberga zbudowanego ze spinów $S = 1$ okazały się niezwykle owocne. Szczegółowe badanie jego topologicznej stabilności doprowadziło do podania przez Xiao-Gang Wena i współpracowników (Chen i inni, 2013) jednolitej klasyfikacji chronionych przez symetrię stanów topologicznych zarówno w jednym, jak i w większej liczbie wymiarów. Ponadto spektrum splątania takiego stanu jest głównym elementem *grupy re-normalizacji macierzy gęstości* (White, 1992) i technik opartych na *stanach macierzowo iloczynowych*, które zostały rozwinięte częściowo w celu testowania i sprawdzania tzw. hipotezy Haldane'a. Cechy nieoczekiwane chronionych topologicznie stanów brzegowych ujawniają się wciąż na nowo w związku z *topologicznymi stanami materii*, np. przy okazji tzw. modów Majorany, które wystę-

7. O aksjonach i roli kąta θ w fizyce wysokich energii zob. wykład noblowski Franka Wilczka *Postępy Fizyki* 56 (4), 154 (2005) (przyp. tłum.).

pują na brzegach topologicznych nadprzewodzących wirów; prosty *zabawkowy model* takich stanów, odgrywający podobną rolę co model AKLT, podał Kitajew (Kitayev, 2001). Stany te są obecnie uznawane za możliwe podłoże, na którym można będzie zrealizować przyszłe topologiczno-quantowe przetwarzanie informacji. Rozwój fizyki materii skondensowanej, jaki wyniknął z nieoczekiwanego odkrycia około roku 1980 topologicznych faz materii, okazał się zaskakująco bogaty!

Patrząc wstecz na to, jak rozwinęła się dziedzina topologicznej kwantowej materii, którą zainicjowały tamte odkrycia uderza mnie, jak ważne w odkrywaniu nowej fizyki było wykorzystanie zabawkowych modeli ilustrujących samą istotę rozpatrywanych problemów. Zwykło się myśleć o modelach jednowymiarowych, że są one tylko „zadaniami domowymi”, które trzeba odrobić przed przystąpieniem do badania rzeczywistych trójwymiarowych układów. W istocie, częściowo z powodu tego, że skutki kwantowych fluktuacji są najbardziej spektakularne w układach niskowymiarowych, właśnie taki sposób postępowania umożliwił odkrycie wielu interesujących zjawisk i stworzenie zupełnie nowego sposobu patrzenia na fizykę materii skondensowanej i egzotyczne stany topologiczne.

Przypadł mi w udziale przywilej uczestniczenia w otwarciu nowej dziedziny, do której wielu innych przyczyniło się zdumiewającymi odkryciami i która doprowadziła do marzeń o nowych kwantowych technologiach przetwarzania informacji. Dziękuję Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk za uhonorowanie moich współlaureatów oraz mnie samego i tym samym całej tej ekscytującej dziedziny fizyki.

Literatura

- Affleck, I., T. Kennedy, E. H. Lieb, H. Tasaki (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799.
- Berry, M. V. (1984), *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** (1802), 45.
- Bethe, H. (1931), *Z. Phys.* **71** (3), 205.
- Botet, R., R. Jullien (1983), *Phys. Rev. B* **27**, 613.
- Buyers, W. J. L., R. M. Morra, R. L. Armstrong, M. J. Hogan, P. Gerlach, K. Hirakawa. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 371.
- Chang, C.-Z., J. Zhang, X. Feng, J. Shen, Z. Zhang, M. Guo, K. Li, Y. Ou, P. Wei, L.-L. Wang, Z.-Q. Ji, Y. Feng, S. Ji, X. Chen, J. Jia, X. Dai, Z. Fang, S.-C. Zhang, K. He, Y. Wang, L. Lu, X.-C. Ma, Q.-K. Xue (2013), *Science* **340** (6129), 167.
- Chen, X., Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, X.-G. Wen (2013), *Phys. Rev. B* **87**, 155114.
- Faddeev, L., L. Takhtajan (1981), *Physics Letters A* **85** (6), 375.
- Fradkin, E., E. Dagotto, D. Boyanovsky (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2967.
- Fu, L., C. L. Kane, E. J. Mele (2007), *Phys. Rev. Lett.* **98**, 106803.
- Haldane, F. D. M. (1981a), ILL preprint SP81/95, arXiv:1612.00076.
- Haldane, F. D. M. (1981b), *Journal of Physics C: Solid State Physics* **14** (19), 2585.
- Haldane, F. D. M. (1983a), *Phys. Lett.* **93A**, 464.
- Haldane, F. D. M. (1983b), *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153.
- Haldane, F. D. M. (1988), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015.
- Haldane, F. D. M., S. Raghu (2008), *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013904.
- Halperin, B. I. (1982), *Phys. Rev. B* **25**, 2185.
- Hofstadter, D. R. (1976), *Phys. Rev. B* **14**, 2239.
- Jordan, P., E. Wigner (1928), *Z. Phys.* **47** (9), 631.
- Kane, C. L., E. J. Mele (2005), *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802.
- Kitayev, A. Y. (2001), *Physics-Uspekhi* **44** (10S), 131.
- Klitzing, K. v., G. Dorda, M. Pepper (1980), *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494.
- Laughlin, R. B. (1981), *Phys. Rev. B* **23**, 5632.
- Li, H., F. D. M. Haldane (2008), *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010504.
- Luther, A., I. Peschel (1975), *Phys. Rev. B* **12**, 3908.
- Luttinger, J. M. (1963), *Journal of Mathematical Physics* **4** (9), 1154.
- Mattis, D. C. M., E. H. Lieb (1965), *Journal of Mathematical Physics* **6** (2), 304.
- Moore, J. E., L. Balents (2007), *Phys. Rev. B* **75**, 121306.
- Qi, X.-L., T. L. Hughes, S.-C. Zhang (2008), *Phys. Rev. B* **78**, 195424.
- Roy, R. (2009), *Phys. Rev. B* **79**, 195322.
- Schotte, K. D., U. Schotte (1969), *Phys. Rev.* **182**, 479.
- Semenoff, G. W. (1984), *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449.
- Simon, B. (1983), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167.
- Thouless, D. J., M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405.
- Tomonaga, S. (1950), *Prog. Theor. Phys.* **5** (4), 544.
- Tsui, D. C., H. L. Stormer, A. C. Gossard (1982), *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559.
- Wan, X., A. M. Turner, A. Vishwanath, S. Y. Savrasov (2011), *Phys. Rev. B* **83**, 205101.
- White, S. R. (1992), *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2863.