

Dziedzictwo Edwina Halla

Anna Krzyżewska

Instytut Spintroniki i Informatyki Kwantowej ISQI, Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu*

Streszczenie. Niewątpliwie każdy młody adept nauk fizycznych już na początku swojej naukowej drogi styka się z klasycznym efektem Halla. Co więcej, każdy z nas, w mniejszym bądź większym stopniu korzystając ze zdobyczy techniki, czasem nawet nieświadomie posługuje się urządzeniami, w których wykorzystuje się to zjawisko. Mimo, że od odkrycia klasycznego efektu Halla minęło ponad sto lat, zagadnienie to nie jest zamkniętym rozdziałem na kartach historii fizyki, ale niezwykle płodną ideą, która wciąż skutkuje opisem nowych pokrewnych zjawisk. Odkrywanie nowych efektów Halla na przestrzeni lat może być też swego rodzaju znacznikiem postępu nauki w zakresie fizyki ciała stałego. Rozwijająca się w niewiarygodnym tempie mechanika kwantowa oraz możliwości technologiczne pozwalające na wytwarzanie układów cienkowarstwowych zaowocowały między innymi odkryciem kwantowego efektu Halla. Pogłębianie wiedzy z zakresu fizyki magnetyzmu, a w szczególności rozwój koncepcji spinu, umożliwiły wyjaśnienie mikroskopowych mechanizmów prowadzących do anomalnego efektu Halla [12, 15] i odkrycia spinowego efektu Halla [17, 18]. Wobec powyższego nie dziwi fakt, że współczesne trendy fizyki ciała stałego coraz częściej zwracają się w stronę topologii „dołożyły swoje trzy grosze” w postaci reinterpretacji anomalnego efektu Halla czy obserwacji nowych zjawisk, jak topologiczny czy nieliniowy efekt Halla. Zatem bez wątpienia warto poznać historię i choć pokrótce prześledzić losy jednej z najbardziej owocnych koncepcji fizyki ciała stałego.

Celem tego artykułu jest nakreślenie wspomnianych efektów transportowych przy zachowaniu chronologii. W ich interpretacji posługuję się głównie opisem półklasycznym, gdzie nośniki (elektrony) są traktowane jako cząstki podlegające prawom mechaniki klasycznej. Tam, gdzie takie spojrzenie staje się niewystarczające, wprowadzam jedynie niezbędne pojęcia z zakresu fizyki kwantowej i topologii, które są kluczowe dla wyjaśnienia efektów hallowskich opisanych w ostatnich latach.

Słowa kluczowe: klasyczny efekt Halla, kwantowy efekt Halla, anomalny efekt Halla, spinowy efekt Halla, nieliniowy efekt Halla, spin, oddziaływanie spin-orbita, faza Berry’ego, niezmiennik topologiczny

Abstract. Undoubtedly, all students of physical sciences become acquainted with the classical Hall effect at the very beginning of their scientific path. Moreover, each of us uses the technology based on this phenomenon to a greater or lesser extent without even being aware of it. Although more than one hundred years passed since the experiment of Edwin Hall, the problem of the Hall effect is not a closed chapter in the history of physics. Instead, Hall effects have become an extremely fertile idea yielding discoveries of new phenomena. One can say that the discoveries of new Hall effects have been over the years a kind of metric of scientific progress in solid-state physics. The fast development of quantum mechanics, as well as the technological progress, allowed for the fabrication of semiconducting thin films and, among others, the discovery of the quantum Hall effect. Advancement in the physics of magnetism, and spin physics, allowed to explain the microscopic mechanisms responsible for the anomalous Hall effect [12, 15] and the discovery of the spin Hall effect [17, 18]. It is also not surprising that in contemporary solid-state physics, strongly focusing on topological properties of solids, one can find the new members of the Hall effect family, i.e., the topological and non-linear Hall effect. Hence, it is worth to briefly review one of the most fruitful concepts in solid-state physics.

This article aims to introduce the Hall effects while maintaining the chronology of their discovery. I mainly used a semi-classical picture, where carriers (electrons) are treated as particles governed by the laws of classical mechanics. I also introduced the necessary concepts of quantum physics and topology, which are crucial for explaining the Hall effects described in recent years.

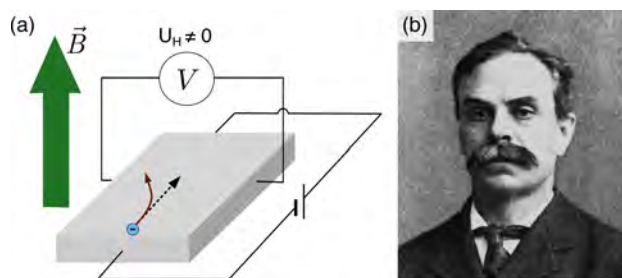
Keywords: classical Hall effect, quantum Hall effect, spin Hall effect, nonlinear Hall effect, spin, spin-orbit interaction, Berry phase, topological invariant

1. Klasyczny „kamień węgielny”

Początek naszej historii sięga 1879 roku, kiedy to w laboratorium na Uniwersytecie Johnsa Hopkinsa w Baltimore (USA), fizyk Edwin Herbert Hall (rys. 1(b)), pracując nad doktoratem pod czujnym okiem swojego mentora Henry’ego Rowlanda, bada wpływ pola magnetycz-

nego na przepływ prądu wymuszonego zewnętrznym polem elektrycznym. Prowadząc eksperymenty na cienkiej płycie złota, młody naukowiec uzyskuje pierwsze wyniki wskazujące na pojawienie się napięcia w płaszczyźnie prostopadłej do przepływającego prądu w obecności stałego pola magnetycznego przyłożonego prostopadle do płaszczyzny próbki (rys. 1(a)) [1, 2]. Odchylenie wiązki nośników

*ORCID: 0000-0002-0569-780X



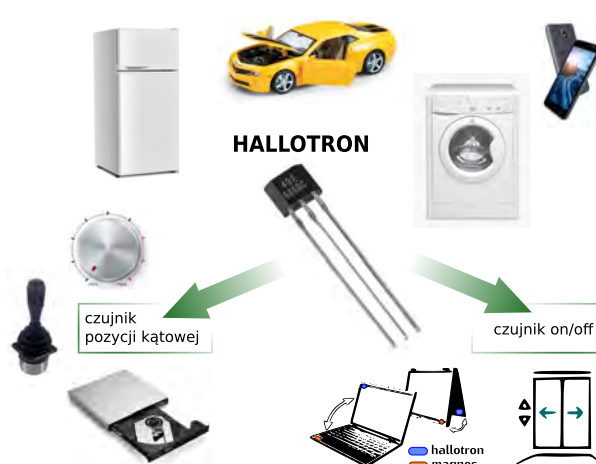
Rys. 1. (a) schemat eksperymentu obrazującego klasyczny efekt Halla, (b) Edwin Herbert Hall (fot. 1903/1904)

prądu Edwin Hall przypisał „nowej sile elektromotorycznej” działającej pod kątem prostym do kierunku zewnętrznego pola elektrycznego, która została później zidentyfikowana jako siła Lorentza.

Badając także inne próbki metali, Hall doszedł do wniosku, że musi istnieć pewna stała charakteryzująca opór poprzeczny, R_{xy} , w danym materiale i niezależna od jego wymiarów. Co więcej, wielkość R_{xy} jest wprost proporcjonalna do wartości zewnętrznego pola magnetycznego, B : $R_{xy} = R_H \frac{B}{d}$, gdzie d jest grubością próbki. Przewidywania te sprawdziły się i określono stałą Halla $R_H = \frac{1}{ne}$, która z dobrą zgodnością jest wykorzystywana przy eksperymentalnym wyznaczaniu gęstości nośników, n , w metalach jednowartościowych, tj. z jednym elektronem przewodnictwa na atom (e — ładunek elementarny)¹.

Zjawisko Halla znalazło bezpośrednie zastosowanie w praktyce w postaci czujników Halla zwanych hallotronami, które służą do wykrywania i pomiaru amplitudy pola magnetycznego. Ze względu na swoją odporność na zanieczyszczenia, bezdotykowe działanie, dobrą dokładność pomiaru i stosunkowo niewielki koszt produkcji, hallotrony są szeroko stosowane między innymi do wykrywania elementów magnetycznych, wyznaczania ich prędkości czy chociażby jako zwykłe przełączniki reagujące na zmiany pola magnetycznego. Hallotrony, wykonane głównie z materiałów półprzewodnikowych, możemy znaleźć choćby w czytnikach płyt CD, DVD, telefonach komórkowych, sprzęcie komputerowym, AGD czy przemyśle motoryzacyjnym (rys. 2) [3].

Przykładowo, hallotrony, jako czujniki typu on/off, służą do detekcji otwarcia/zamknięcia pokrywy laptopa bądź etui czytnika czy telefonu. Wystarczy, że na jednej powierzchni umieścimy mały magnes, a na drugiej sensor Halla reagujący zmianą napięcia na obecność pola magnetycznego w jego otoczeniu. Zamknięcie pokrywy związane ze zbliżeniem się magnesu do czujnika spowo-



Rys. 2. Szereg zastosowań czujnika Halla

duje odebranie przez czujnik sygnału o zmianie pola magnetycznego. Informacja ta jest przesyłana przez czujnik do odpowiedniego oprogramowania, co spowoduje reakcję w postaci przejścia urządzenia w stan uśpienia. Taki automatyczny sposób działania pozwala zaoszczędzić trochę energii. Podobnie otwarcie pokrywy będzie skutkowało wybudzeniem się urządzenia i przejściem w tryb gotowości do pracy.

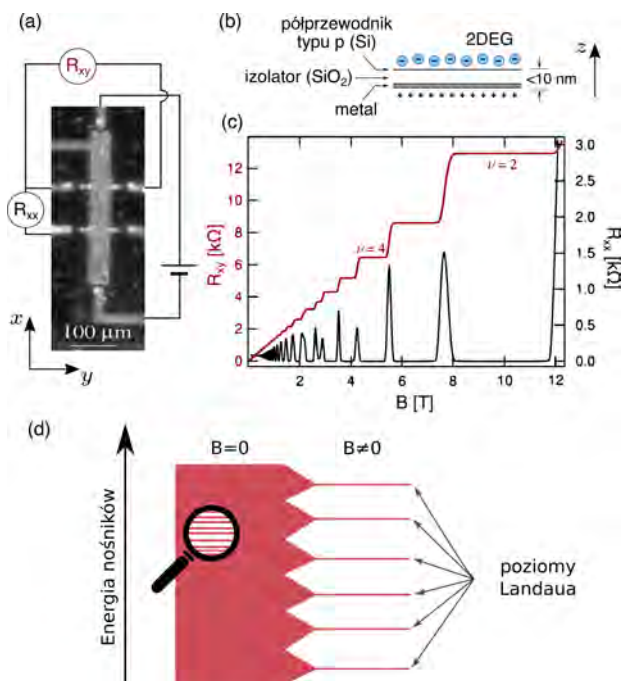
Hallotrony są stosowane także jako czujniki pozycji kątowej. Wyobraźmy sobie magnes stały w kształcie walca, którego podstawa jest połączona z elementem mogącym wykonywać ruch obrotowy tak, że każdy ruch tego elementu wiąże się bezpośrednio z ruchem obrotowym magnesu. Na magnes nałożony jest pierścień pozostający w stałej pozycji, na którym znajdują się równo rozmieszczone czujniki Halla. Obrót elementu ruchomego połączonego z magnesem wiąże się ze zmianą pola magnetycznego odbieranego przez czujniki znajdujące się na pierścieniu. Ruch ten przekłada się na odpowiednie zmiany napięcia, które po przetworzeniu sygnału pozwalają na detekcję kąta obrotu. Taka informacja może być wykorzystywana choćby w motoryzacji przy wykonaniu manewru skrętu pojazdu, gdzie elementem ruchomym jest kierownica.

Jednak, jak już wspomnieliśmy, odkrycie klasycznego efektu Halla było dopiero początkiem badań nad procesami związanymi z „poprzeczną” reakcją układu na zaburzenie zewnętrzne (czyli prostopadłą do kierunku zaburzenia — przyp. red.). Pionierskie prace Edwina Halla w tej dziedzinie uczyniły go ojcem szeregu zjawisk określanych dziś mianem efektów hallowskich, takich jak: klasyczny (opisany powyżej), kwantowy, anomalny, spinowy czy nieliniowy efekt Halla, których wspólnym mianownikiem jest przepływ ładunku/spinu w kierunku prostopadłym do zewnętrznego pola elektrycznego.

1. Stała Halla może przyjąć wartość dodatnią bądź ujemną, w zależności od tego, czy nośnikami ładunku w danym materiale są, odpowiednio, dziury bądź elektrony.

2. Nowa „jednostka” stała h/e^2

Jest rzeczą znaną, że niejednokrotnie piękno fizyki możemy docenić na poziomie mikro(nano)skopowym, w układach o zredukowanej liczbie wymiarów, o czym fizycy już niejednokrotnie się przekonali analizując procesy zachodzące w ramach fizyki kwantowej. Nie inaczej sprawa wygląda w przypadku kwantowego efektu Halla, gdzie zjawiska kwantowe stają się widoczne w skali makroskopowej. Efekt ten, charakterystyczny dla układów dwuwymiarowych, został odkryty w obecności silnego pola magnetycznego, B , w temperaturach helowych ($T \lesssim 4,2$ K). Okazało się, że wraz ze wzrostem B w pewnych zakresach wartości pola magnetycznego opór Halla pozostaje niezmienny, a jego wartość możemy wyrazić poprzez wielokrotności stosunku jednej z najbardziej fundamentalnych wielkości fizycznych, tj. ładunku elementarnego, e , i jednej z podstawowych stałych fizycznych — stałej Plancka, h : $R_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$, przy czym $\nu = 1, 2, 3, \dots$ dla całkowitego i $\nu = 1/3, 2/5, 3/7, \dots$ dla ułamkowego kwantowego efektu Halla. Co więcej dla tych samych zakresów, przy których R_{xy} osiąga *plateau*, opór w kierunku przyłożonego pola elektrycznego, R_{xx} , zanika (rys. 3(c)).



Rys. 3. Kwantowy efekt Halla: (a) schemat eksperymentu obrazującego kwantowy efekt Halla [4], (b) przekrój poprzeczny przez strukturę MOSFET, (c) zależność oporu podłużnego, R_{xx} , i poprzecznego, R_{xy} , od wartości zewnętrznego pola magnetycznego, (d) schematyczne przedstawienie skwantowania poziomów Landaua w silnym polu magnetycznym (schemat przedstawia fragment struktury pasmowej opisaną dokładniej na rys. 5)

Całkowity kwantowy efekt Halla możemy wyjaśnić wykorzystując model jednoelektronowy, który zakłada brak oddziaływań wzajemnych pomiędzy nośnikami. W przypadku bardzo cienkiej próbki (rzędu

mikro(nano)metrów, gdzie długość i szerokość znacznie przekraczają grubość materiału), nośniki poruszają się swobodnie w płaszczyźnie próbki, ale mają ograniczoną zdolność ruchu w kierunku do niej prostopadłym, stąd mówimy, że tworzą tak zwany dwuwymiarowy gaz elektronowy (2DEG). W obecności pola magnetycznego prostopadłego do płaszczyzny próbki, nośniki uwięzione w postaci 2DEG, mogą przyjmować jedynie pewne ściśle określone, skwantowane wartości energii zwane poziomami Landaua. W zakresie silnych pól magnetycznych, skwantowanie poziomów staje się bardziej widoczne, a na każdym z poziomów może znajdować się wiele elektronów (rys. 3(d)). Stąd liczba nośników o danej wartości energii (znajdujących się na tym samym poziomie energetycznym) jest niezmienna w pewnym przedziale wartości pola magnetycznego, B , co objawia się stałą wartością R_{xy} . „Przechodzeniu” nośników pomiędzy poziomami wraz ze zmianą wartości pola magnetycznego towarzyszy duże rozpraszanie energii, co uwidacznia się w postaci maksimów R_{xx} [4, 5].

Istnienie całkowitego kwantowego efektu Halla zostało przewidziane teoretycznie w 1975 roku przez Tsuneya Ando i współpracowników [6], choć ze względu na zastosowane założenia upraszczające (zaniedbanie defektów czy wpływu kontaktów pomiędzy próbką a elektrodami), w eksperymentalne potwierdzenie otrzymanych wyników nie do końca wierzyli nawet sami autorzy. Sytuacja się zmieniła, kiedy pięć lat później zjawisko to potwierdził w eksperymencie wykorzystującym tranzystor krzemowy typu MOSFET (struktura metal-tlenek-półprzewodnik) Klaus von Klitzing [7], za co otrzymał Nagrodę Nobla z fizyki w 1985 roku [4]. Relację h/e^2 udało się odtworzyć z dokładnością rzędu $1/10^6$, dzięki czemu stała się ona standardem przedstawiania rezystancji. Co więcej, otrzymany rezultat został potwierdzony także w innych materiałach (np. heterostrukturach półprzewodnikowych bazujących na arsenku galu) z różną ilością domieszek w układzie. Próbkę i schemat układu do pomiaru kwantowego efektu Halla przedstawia rys. 3(a), natomiast przekrój przez strukturę MOSFET (ang. *Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor*) ilustruje rys. 3(b).

W przypadku ułamkowego kwantowego efektu Halla, w grę wchodzi także oddziaływanie coulombowskie pomiędzy elektronami, co skutkuje grupowaniem nośników w formy kwazicząstek (w niskich temperaturach mówimy o powstaniu tak zwanej *cieczy kwantowej*), prowadzącym do dodatkowego rozszczepienia poziomów Landaua. Odkrycie oraz interpretacja ułamkowego kwantowego efektu Halla zostały uhonorowane Nagrodą Nobla dla trzech fizyków: Roberta Laughlina, Horsta Störmera i Daniela C. Tsui w 1998 [8], choć opis mechanizmu prowadzącego do niektórych otrzy-

many w eksperymencie wartości ułamkowych nadal pozostaje na liście nierozwiązanych problemów z zakresu fizyki ciała stałego [9].

Niska temperatura sprawia, że elektron nie mając wystarczająco dużo energii termicznej, aby pokonać przerwę energetyczną, pozostaje na zajmowanym przez niego poziomie. Jednak żeby z powodzeniem myśleć o praktycznym wykorzystaniu zjawiska, zdecydowanie musimy wyjść poza reżim temperatur helowych. Skwantowanie oporu poprzecznego w silnych polach magnetycznych (ok. 30 T) w temperaturze pokojowej udało się zaobserwować w grafenie [10] w 2007 roku. Grafen dał się poznać jako dość niezwykły materiał, w którym nośniki możemy traktować jak cząstki bezmasowe. Dzięki temu przerwy pomiędzy poziomami Landaua są dużo większe niż we wcześniej badanych materiałach półprzewodnikowych, co pozwala na zachowanie przerwy energetycznej nawet w wyższych temperaturach.

3. Rola spinu w warunkach (bez)polowych

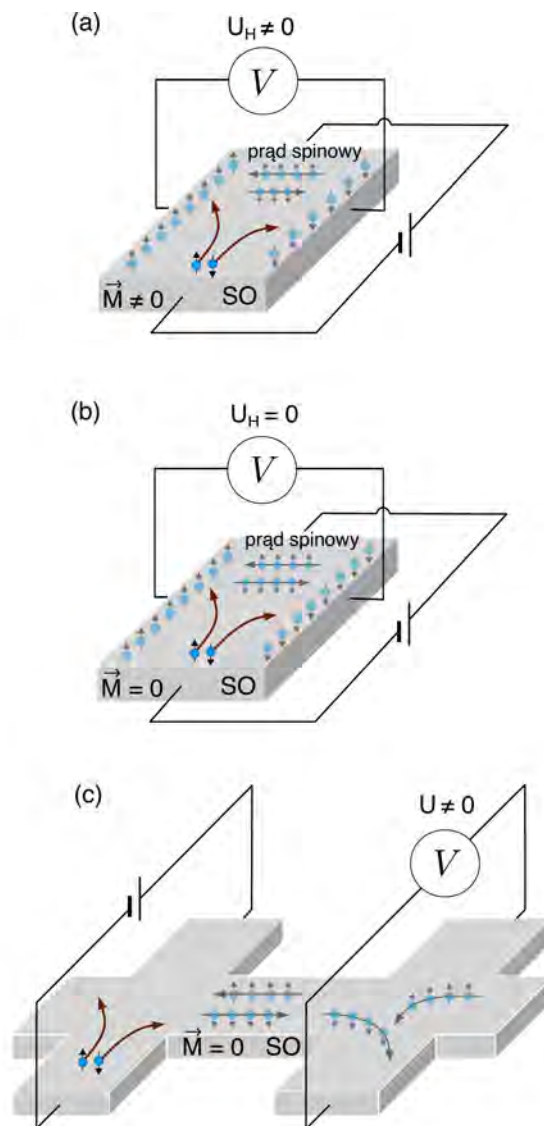
Jak zauważyliśmy do tej pory zarówno w klasycznym, jak i kwantowym efekcie Halla czynnikiem niezbędnym do uzyskania poprzecznej (do siły wymuszającej — przyp. red.) odpowiedzi układu była obecność zewnętrznego pola magnetycznego. Postawmy sobie zatem pytanie, czy jesteśmy w stanie zaobserwować prąd poprzeczny w układzie bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego?

Już sam Edwin Hall zdawał sobie sprawę z tego, że w przewodniku magnetycznym, np. w żelazie (ferromagnetyku) napięcie pomiędzy jego brzegami jest zdecydowanie większe niż w przypadku przewodnika niemagnetycznego, takiego jak złoto czy srebro [11]. Fakt ten stał się impulsem do badania wpływu magnetyzacji w układzie na efekt Halla.

Rozważając układy magnetyczne, musimy uwzględnić fakt, że elektron jest nośnikiem nie tylko ładunku, ale także spinu. Spin elektronu może przyjmować dwa stany, nazywane umownie spinem „w górę” (\uparrow) i „w dół” (\downarrow), które oznaczamy strzałkami w przeciwnych kierunkach, jak na rys 4.

Ferromagnetyk wykazuje spontaniczne namagnesowanie, co sprawia, że wypadkowa wartość magnetyzacji takiego materiału jest różna od zera i mamy do czynienia z niejednakową liczbą nośników ze spinem \uparrow i \downarrow . Okazało się, że jeśli wywołamy przepływ prądu w niektórych ferromagnetykach, to nawet bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego otrzymamy niezerowe napięcie hallowskie (rys. 4(a)). Zjawisko to nazwano anomalnym efektem Halla.

Zauważmy, że chociaż już Edwin Hall otrzymał pierwsze wyniki sugerujące wpływ magnetyzacji materiału na prąd poprzeczny w układzie, to dopiero prace



Rys. 4. Schemat eksperymentu obrazującego: (a) anomalny efekt Halla, (b) spinowy efekt Halla oraz (c) pomiar prądu spinowego w odwrotnym spinowym efekcie Halla (skrót SO oznacza obecność oddziaływania typu spin-orbita w materiale)

kolejnych fizyków, które ukazały się kilkadziesiąt lat później, pozwoliły zrozumieć mechanizmy stojące za tym zjawiskiem [12, 13, 14].

Co sprawia, że pomimo nieobecności siły Lorentza zakrzywiającej tor ruchu elektronów, nośniki nie poruszają się wzdłuż kierunku pola elektrycznego, ale ewidentnie zakrzywiają swoją trajektorię? Przyczyną takiego zachowania nośników jest obecność w układzie oddziaływania typu spin-orbita (SO). Oddziaływanie to pełni rolę wewnętrznego pola magnetycznego, które działa na spin cząstki, w odróżnieniu od zewnętrznego pola magnetycznego wpływającego na poruszające się ładunki elektryczne. Oddziaływanie SO jest źródłem m.in. procesów rozproszeniowych zależnych od spinu. Procesy te prowadzą do sytuacji, w których w wyniku oddziaływania elektronu z domieszką, tory ruchu nośników o przeciwnych spinach ulegają odchyleniu.

niu w przeciwnych kierunkach. Co więcej, oddziaływanie spinowo-orbitalne jest także źródłem modyfikacji struktury pasmowej, która generuje dodatkowy wkład do prędkości nośników, zwany *prędkością anomalną*. W efekcie otrzymujemy nierównowagową akumulację nośników o przeciwnych spinach na krawędziach próbki, która jest źródłem napięcia hallowskiego nawet pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego.

Jest jeszcze jeden istotny aspekt, o którym warto wspomnieć. Pamiętamy, że elektrony przenoszą ładunek oraz spin, co pozwala nam mówić o prądzie ładunkowym, a także o prądzie spinowym spowodowanym ruchem elektronów. W wyniku oddziaływania typu spin-orbita, elektrony ze spinem \uparrow są odchylane w lewo, natomiast elektrony ze spinem \downarrow są odchylane w prawo (rys. 4(a)). W układach ferromagnetycznych wprowadzamy pojęcie spinu większościowego i mniejszościowego, co w naszym przypadku oznacza, że spin \uparrow jest spinem większościowym, który wyznacza nam także kierunek przepływu ładunku. W efekcie, oprócz poprzecznego prądu ładunkowego otrzymujemy także poprzeczny prąd spinowy.

W tym momencie niemal automatycznie nasuwa się pytanie, czy istnieje możliwość generacji prądu spinowego bez towarzyszącego mu prądu ładunkowego, tj. uzyskania *czystego prądu spinowego*? Twierdzącej odpowiedzi na to pytanie udzielili w 1971 roku Mikhail Dyakonov i Vladimir Perl [16, 17], wysnuwając hipotezę o możliwości konwersji prądu ładunkowego na spinowy w układzie paramagnetycznym, tj. takim, w którym liczby nośników ze spinem \uparrow i \downarrow są identyczne. Fakt ten sprawia, że akumulacji spinu na krawędziach próbki nie towarzyszy napięcie hallowskie. Zjawisko to zyskało miano spinowego efektu Halla (rys. 4(b)) i znalazło potwierdzenie w eksperymencie przeprowadzonym w układach półprzewodnikowych dopiero ponad 30 lat później [19].

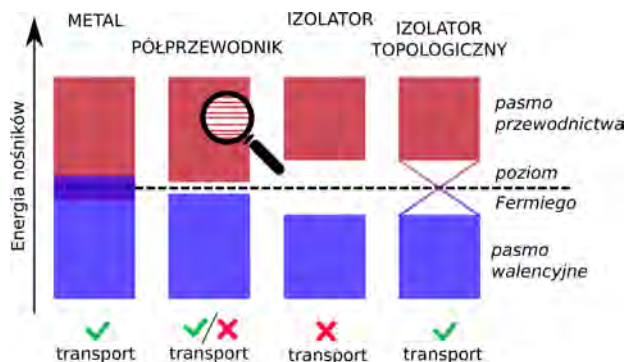
Wcielając się w rolę dociekliwego ucznia, postawmy sobie kolejne pytanie: czy i w jaki sposób możemy zmierzyć prąd spinowy? Zrealizowane koncepcje pomiaru prądu spinowego wykorzystują odwrotny spinowy efekt Halla [20, 21], poprzez detekcję prądu ładunkowego wywołanego prądem spinowym. Napięcie, którego źródło stanowi powstały prąd ładunkowy, jest proporcjonalne do pierwotnego prądu spinowego, stąd otrzymujemy informację o prądzie spinowym w układzie (rys. 4(c)) [22].

Spinowy i odwrotny spinowy efekt Halla stwarzają możliwość generacji i detekcji prądu spinowego w układach niemagnetycznych, będąc tym samym cennym narzędziem badawczym, umożliwiającym kontrolę spinu bez udziału pola magnetycznego. Ponadto na podstawie spinowego efektu Halla stworzono spinowy tranzystor

polowy, bazujący na prądzie spinowym, w odróżnieniu od tradycyjnych tranzystorów wykorzystujących przepływ ładunku [23].

4. W stronę topologii

Podobnie jak klasyczny efekt Halla, także anomalny i spinowy posiadają swoje kwantowe odpowiedniki. Efekty te obserwujemy w nowej klasie materiałów — w tzw. topologicznych izolatorach (rys. 5) [25].



Rys. 5. Schematyczne przedstawienie struktury pasmowej (rozkładu energetycznego nośników) dla metalu, półprzewodnika, izolatora i izolatora topologicznego. Poziom Fermiego wyznacza górną granicę obsadzenia stanów. Obecność nośników w pasmie przewodnictwa (kolor czerwony) — biorących udział w transporcie — sprawia, że dany materiał jest przewodnikiem (metal). W przypadku półprzewodnika dostarczenie do układu niewielkiej ilości energii (np. termicznej poprzez zwiększenie temperatury) powoduje przeskok nośników z pasma walencyjnego do przewodnictwa, dzięki czemu w materiale może zachodzić transport ładunku. Dla izolatora i izolatora topologicznego przerwa pomiędzy pasmem przewodnictwa a walencyjnym jest duża, co wskazywałoby na brak transportu w układzie. Jednak w przypadku izolatora topologicznego 3D/2D istnienie stanów przewodzących na powierzchni/krawędziach materiału sprawia, że materiał jest przewodnikiem na powierzchni/krawędzi, pozostając we wnętrzu izolatorem. Lupa wskazuje, że za schematycznym przedstawieniem pasma przewodnictwa i walencyjnego jako kolorowe bloki, kryje się zbiór pasm, których liczba i rozkład oraz ukształtowanie są specyficzne dla danego układu

Topologia jest dziedziną matematyki, której pojęcia zostały z powodzeniem przeniesione na grunt fizyki. Od czasu przyznania Nagrody Nobla z fizyki w 2016 roku za *teoretyczne odkrycia topologicznych przejść fazowych i topologicznych faz materii* trzem brytyjskim naukowcom: Davidowi Thoulessowi, Duncanowi Haldane'owi oraz Michaelowi Kosterlitzowi [24], koncept topologii coraz wyraźniej odciska swoje piętno w fizyce ciała stałego. Zapewne wielu z nas słyszało o równoważności topologicznej kubka i obwarzanka: mówi nam ona o tym, że pewne cechy obiektu (tu: liczba otworów) nie ulegają zmianie nawet przy modyfikacji innych wielkości (deformacji kubka, jakby był zrobiony z plasteliny), przyjmując ściśle określone wartości. Cechy te określa się mianem *niezmienników topologicznych*.

I tak, niezmiennikiem topologicznym w podanym przykładzie będzie liczba dziur w badanym obiekcie: o ile zarówno dla kubka (z uszkiem) jak i obwarzanka wartość tej stałej jest równa 1, o tyle dla arbuza czy wazonu

przyjmie ona wartość 0, natomiast w przypadku torby na zakupy czy oprawki okularowej — 2.

Przechodząc na grunt fizyki, w ramach pojęć topologii możemy wyjaśnić całkowity kwantowy efekt Halla, gdzie stała ν jest niezmiennikiem topologicznym ($R_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$), mogącym przyjmować tylko wartości z zakresu liczb całkowitych. W przypadku ułamkowego kwantowego efektu Halla, uwzględnienie oddziaływania coulombowskiego pomiędzy elektronami powoduje, że stała ν może przyjmować wartości ułamkowe.

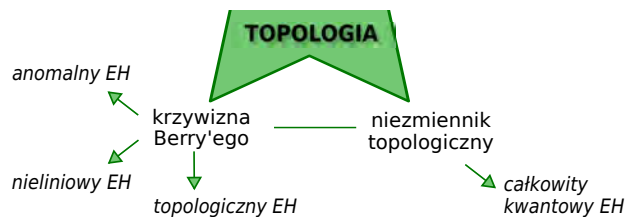
Wyjaśnienie kwantowego efektu Halla zapoczątkowało mariaż z topologią, która odgrywa rolę w opisie efektów hallowskich (rys. 6). W tym miejscu jedynie wspomnę o jej najważniejszych osiągnięciach na tym polu.

Nowe, topologiczne spojrzenie na znane zjawiska doprowadziło do reinterpretacji prędkości anomalnej w anomalnym efekcie Halla, wiążąc ją z tak zwaną krzywizną Berry'ego, którą, pozostając w opisie półklasycznym i przez analogię do elektrodynamiki, możemy wyobrazić sobie jako siłę pola oddziałującego na cząstkę poruszającą się w ramach danego pasma/kanalu n (w modelu jednoelektronowym, na jeden kanał/pasmo przypada jeden elektron).

Zatrzymajmy się na moment w tym miejscu i rozszerzmy nasz półklasyczny opis o interpretację kwantową. Jedną z podstawowych zasad, jakimi rządzi się mechanika kwantowa, jest nielokalność (pojęcie tzw. upiornego działania na odległość uknute przez Alberta Einsteina). Najprościej rzecz ujmując chodzi o to, że zjawiska zachodzące w jednym miejscu mają wpływ na to, co dzieje się w innym. Innymi słowy ważne jest, gdzie przebywała cząstka w trakcie zakreślania swojej trajektorii. W przypadku cząstki poruszającej się w przestrzeni, zasada ta objawia się w postaci *fazy geometrycznej*, którą cząstka zyskuje podczas ruchu po zamkniętym torze. Ze względu na to, że w obrazie kwantowym każdą cząstkę możemy traktować jednocześnie jako falę, stan danej cząstki opisujemy za pomocą funkcji falowej. Wspomniana faza geometryczna wchodzi do opisu takiej funkcji jako tak zwana faza Berry'ego. Ta z kolei jest ściśle związana z krzywizną Berry'ego, będącą źródłem poprzecznej składowej prędkości w anomalnym efekcie Halla.

W układach, gdzie krzywizna Berry'ego pojawia się na skutek niekolinearnego ułożenia spinów (spiny atomów sieci nie leżą w jednej płaszczyźnie) mamy do czynienia z topologicznym efektem Halla [26].

W ostatnich latach pojawiła się także koncepcja nieliniowego efektu Halla, w której główną rolę odgrywa wspomniana krzywizna Berry'ego. Poznane do tej pory efekty Halla możemy sklasyfikować jako liniowe względem pola elektrycznego, $R_{xy} \propto E_x$. Nieliniowy efekt



Rys. 6. Powiązanie efektów hallowskich (EH) z topologią

Halla polega na pojawieniu się poprzecznego prądu ładunkowego proporcjonalnego do kwadratu wartości pola elektrycznego, $R_{xy} \propto E_x^2$. Obecność nieliniowej odpowiedzi układu została zasugerowana w 2015 roku przez Inti Sodemana i Lianga Fu [27] i potwierdzona w eksperymencie już cztery lata później. Efekt ten zaobserwowano zarówno w dwuwymiarowych układach niemagnetycznych bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego, jak i w izolatorach topologicznych w obecności pola magnetycznego przyłożonego w płaszczyźnie próbki [28].

Możemy teraz zapytać, czy i w jaki sposób nieliniowy efekt Halla mógłby zostać wykorzystany w praktyce? W odróżnieniu od pozostałych efektów hallowskich, w przypadku nieliniowego efektu Halla potencjalnych zastosowań poszukajmy w obszarze związanym z prądem zmiennym. Ze względu na to, że w odpowiedzi na sygnał o częstotliwości f otrzymujemy poprzeczną odpowiedź o częstotliwości $2f$, układ wykorzystujący ten efekt mógłby działać jako generator drugiej harmonicznej. Operując częstotliwościami giga- i terahercowymi możemy z powodzeniem szukać zastosowania w następnych generacjach sieci bezprzewodowych.

5. Bez kropki nad i

Jak widzimy, rola topologii w interpretacji efektów hallowskich jest nie do przecenienia. Rzetelne przedstawienie pojęć, jakimi posługuje się ta stosunkowo nowa dziedzina wiedzy w kontekście fizyki, wymaga co najmniej osobnego artykułu. Natomiast głównym celem niniejszej pracy było przedstawienie mnogości zjawisk posiadających wspólne korzenie, a także ich interpretacja w języku półklasycznym tam, gdzie jest to możliwe, jedynie w niewielkim stopniu uchylając drzwi do świata fizyki kwantowej. Tym samym autorka z pełną świadomością pozostawia czytelnika z pewnym niedosytem wiedzy mając nadzieję, że udało jej się rozbudzić ciekawość skłaniającą do dalszych poszukiwań odpowiedzi na nurtujące pytania w zakresie przedstawionych zjawisk i aktualnych zagadnień fizyki ciała stałego.

Podziękowanie

Dziękuję Annie Dyrdał za cenne uwagi do tekstu.

Literatura

- [1] E. Hall, On a New Action of the Magnet on Electric Currents, *Am. J. Math.* **2**, pp. 287–292 (1879).
- [2] G. S. Leadstone, The discovery of Hall effect, *Phys. Educ.* **14**, 374 (1979).
- [3] J. Doliński, *Czujniki Halla — pomiary pola magnetycznego i detekcja położenia obiektów*, <https://elektronikab2b.pl> (2017), [dostęp 22.03.2020].
- [4] K. von Klitzing, The Quantized Hall Effect, *Nobel Lecture* (1985); 25 Years of Quantum Hall Effect (QHE). A Personal View on the Discovery. Physics and Applications of this Quantum Effect, *Séminaire Poincaré* **2**, (2004).
- [5] K. I. Wysokiński, T. Dietl, Całkowity i ułamkowy kwantowy efekt Halla, *Postępy Fizyki* **36**, 515, (1985).
- [6] T. Ando i in., Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System, *J. Phys. Soc. Jpn.* **39**, 279 (1975).
- [7] K. von Klitzing i in., New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [8] H. L. Störmer, Nobel Lecture: The fractional quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 875 (1999).
- [9] List of unsolved problems in physics, https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_physics, [dostęp 05.04.2020].
- [10] K. Novoselov i in., Room-temperature quantum Hall effect in graphene, *Science* **315**, 1379 (2007).
- [11] E. Hall, XVIII. On the “Rotational Coefficient” in nickel and cobalt. *London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **12** (74), 157–172 (1881).
- [12] R. Karplus, J. M. Luttinger, Hall Effect in Ferromagnetics, *Phys. Rev.* **95**, 1154 (1954).
- [13] J. Smit, The spontaneous Hall effect in ferromagnetics, *Physica* **21**, 877 (1955); *Physica* **24**, 39 (1958).
- [14] L. Berger, *Side-Jump Mechanism for the Hall Effect of Ferromagnets*, *Phys. Rev. B* **2**, 4559 (1970).
- [15] V. Zayets, *Anomalous Hall effect (AHE)*, https://staff.aist.go.jp/v.zayets/spin3_50_AnomalousHall.html, [dostęp 19.10.2020].
- [16] M. Dyakonov, V. Perel, Possibility of orienting electron spins with current, *Sov. Phys. JETP Lett.* **13**, 11 (1971); Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors, *Phys. Lett. A* **35**, 6 (1971).
- [17] J. Hirsch, Spin Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1834 (1999).
- [18] V. Zayets, *Spin Hall effect. Inverse spin Hall effect*, https://staff.aist.go.jp/v.zayets/spin3_42_SpinHallEffect.html, [dostęp 19.10.2020].
- [19] Y. Kato i in., Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors, *Science*, **306**, 5703 (2004); J. Wunderlich i in., Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled Semiconductor System, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 4 (2005).
- [20] E. Saitoh i in., Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 182509 (2006).
- [21] S. Valenzuela, M. Tinkham, Direct electronic measurement of the spin Hall effect, *Nature* **442**, 176 (2006).
- [22] J. Balakrishnan i in., Colossal enhancement of spin-orbit coupling in weakly hydrogenated graphene, *Nat. Phys.* **9**, 284 (2013); A. Avsar i in., Spin-orbit proximity effect in graphene, *Nat. Commun.* **5**, 1 (2014).
- [23] J. Wunderlich i in., Spin Hall Effect Transistor, *Science* **330**, 1801 (2010).
- [24] Nobel Prize in Physics 2016, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016>, [dostęp: 10.04.2020].
- [25] Ł. Cywiński, T. Dietl, Izolatory topologiczne — niespodzianki ukryte w strukturze pasmowej izolatorów, *Postępy Fizyki* **61**, 4 (2010).
- [26] A. Neubauer i in., Topological Hall Effect in the A Phase of MnSi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 186602 (2009).
- [27] I. Sodemann, L. Fu, Quantum nonlinear Hall effect induced by Berry curvature dipole in time-reversal invariant materials, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 216806 (2015).
- [28] K. Kang i in., Nonlinear anomalous Hall effect in few-layer WTe₂, *Nat. Mater.* **18**, 324 (2019); Q. Ma i in., Observation of the nonlinear Hall effect under time-reversal-symmetric conditions. *Nature* **565**, 337 (2019); P. He i in., Nonlinear Planar Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 016801 (2019).